И. Н. Кавун

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

ДЛЯ ШКОЛ I-й СТУПЕНИ В ДВУХ ЧАСТЯХ.

Часть I

осударственным Ученым Советом допущен в качестве учебника для единой рудовой школы (протокол заседания Научно-Педаг. Секции Гос. Уч. Сов. от 20/х 22 г.).

Государственное издательство

1923

Гиз № 4947. Тираж 25.000.

Типография «Сеятель» Е. В. Высоцкого, Пгр., Вознесенск. пр., 53.

К УЧИТЕЛЮ.

Ни один предмет, вероятно, не дает столько свободы для личного и педагогического усмотрения, как начальный курс геометрии. Если мы пересмотрим множество руководств по начальной геометрии, вышедших у нас и заграницей, то найдем в каждом из них такие особенности, которые делают одну книгу совсем непохожей на все другие. Впрочем, исключение составляют те книги по этому предмету, которые написаны „по образу и подобию“, так называемых, логических курсов и на которых известный ученый Ф. Клейн рекомендует делать предостерегающую надпись: „не для детей!“. Поэтому автор настоящей книги желал бы, чтобы учитель, который будет читать ее, ознакомился предварительно из этого предисловия с ее особенностями, которые при чтении книги могут ускользнуть от внимания или остаться немотивированными, а потому и непонятными.

Прежде всего заметим, что в книге предмет *излагается*, в классе же он будет *разрабатываться* и при том по-преимуществу в вопросно-ответной форме.

В основу книги положены методы генетический и изобретательный. В классной работе эти методы должны быть усилены.

I. Генетический метод. Отметим здесь более существенные черты сперва генетического метода. В начале курса мы рассматриваем частные геометрические формы и к общим родовым понятиям переходим значительно позже.

Приведем примеры.

Из семейства четыреугольников в книге излагается сперва простейший из них—квадрат, за ним следует прямоугольник, наконец, параллелограмм и трапеция. Эти четыреугольники в понятии учеников в это время существуют, как отдельности, мало между собою связанные, и совершенно не подведены под общее родовое понятие. По мере изучения их, выясняются общие их свойства, которыми позднее во II части курса

мы пользуемся для того, чтобы нарисовать перед учащимся картину родства, так сказать, родословную видов четыреугольника, идя уже в обратном направлении—от общего понятия четыреугольника к частным его видам.

Еще пример. Знакомя учащихся с измерением площадей плоских фигур, мы начинаем с квадрата и прямоугольника, которые делим на квадратные клетки, на кв. единицы. Измеряя площадь параллелограмма и треугольника, мы также пытаемся покрыть их поверхности квадратными единицами и достигаем этого, превращая эти фигуры в прямоугольники. Площади правильных и неправильных многоугольников мы вычисляем, пользуясь правилами вычисления площади треугольника и не обращая этих многоугольников в прямоугольники; только вскользь напоминаем о возможности такого обращения. Наконец, площадь круга вычисляется уже абстрактно, по правилу. Впрочем, и здесь образа квадрата, как меры поверхности, мы не устраняем окончательно и предлагаем учащимся узнать приблизительно площадь круга, покрыв его сеткой из квадратиков и подсчитав их (ч. II).

Понятия о геометрических формах в начале курса имеют грубо-вещественный характер. Куб—из глины, бумаги или дерева. Прямая линия—пока только отрезок, ограниченный размерами чертежа; образом ее служат натянутая нить, черта, узкая полоска бумаги, ребро линейки и пр.; она может быть толще и тоньше. Постепенно под влиянием изучения свойств геометрических форм они идеализируются.

Генетический метод обязывает нас развертывать пред учащимися предмет в такой форме, чтобы новые вопросы возникали у них естественно в процессе развития понятий и вытекали из хода работы. Глава I этой книги может иллюстрировать эту мысль. Второй пример заимствуем из второй части. Для измерения недоступных расстояний изучаем равенство и подобие треугольников. Условия равенства и подобия треугольников появляются при построении треугольников, конкретнее говоря, при решении задачи—перенести с одного места на другое треугольник, не меняя его величины или изменив величину, но не меняя его формы. При этом возникает вопрос, всегда ли возможно построить треугольник по данным трем сторонам или по данным двум углам и их стороне. Изучая ближе условия возможности, мы приходим к относительному положению окружностей и к сумме углов треугольника (ч. II).

Наконец, еще третий пример. Осевая и центральная симметрия изучаются в курсе не как самодовлеющие только ценности. Они появляются в курсе, как методы изучения фактов, как средства сравнения

фигур. Когда нам надо убедиться, равны ли фигуры, мы их налагаем одну на другую. Отыскивая при этом кратчайший путь движения фигуры, мы останавливаемся или на повороте ее вокруг прямой или на повороте ее вокруг точки, откуда и возникают оба вида симметрии.

II. Изобретательный метод. С генетическим методом тесно сплетается метод изобретательный (эвристический). Стремясь вызвать учащегося на самостоятельную изобретательную работу, мы расчленяем сложный вопрос на ряд простых вопросов, доступных для самостоятельного решения их учащимся. Такие расчленения можно встретить в книге весьма часто.

III. Образность и правила. Не следует искусственно ускорять процесс развития отвлеченных геометрических понятий. Пусть эти понятия остаются возможно дольше о б р а з н ы м и. Ведь ясность, отчетливость в начальном курсе геометрии обусловливаются образностью. Приведем пример. Площадь прямоугольника учащиеся находят, заполняя его квадратными единицами—сперва фактически, а затем в воображении. Подсчет этих кв. единиц приводит их к известному правилу измерения площади прямоугольника. Правило это должно возникнуть в голове ученика естественно, самостоятельно, без энергичного подталкивания со стороны учителя,—под влиянием стремления к облегчению и сбережению собственного труда. Возникновению мысли о правиле предшествует ряд упражнений, которые учащиеся решают по соображению, воспроизводя в каждом из них рассуждения заново. Поэтому и в нашей книге правилу предшествует группа задач, другая группа задач его заключает.

IV. Опыт в начальном курсе геометрии. Геометрические знания достигаются в настоящем курсе при помощи опыта, или, как принято говорить, лабораторным методом. Опыт здесь разумеется в следующих видах: черчение, вырезывание из бумаги, склеивание, вылепливание из глины, измерение и оценка на глаз. Пользуясь опытом, мы не подчиняемся ему слепо. Опыт ученика для нас средство для развития мысли учащегося и пытливости его ума.

V. Связь геометрии с другими предметами. Мы стремились к тому, чтобы геометрия не была предметом, обособленным от других научных предметов и от жизненной практики. С этой целью в книгу введено множество задач, содержание которых заимствовано из практики или из научных областей. Геодезические работы проходят чрез весь курс геометрии, не составляя в нем отдельной главы. На практике они будут относиться всегда на весеннюю и осеннюю пору. Наконец, практические задачи служат очень часто исходной точкой при разработке того или другого геометрического вопроса. Изучая какую-нибудь геометрическую

фигуру, мы предварительно рассматриваем ее в каком-либо архитектурном орнаменте; или изучая площадь фигуры, мы берем подходящий для этого пример на плане или на местности.

Очень важно сближение геометрии с арифметикой. Геометрия доставляет арифметике образы при разработке арифметических понятий и материал для арифметических задач. Поэтому в настоящем курсе имеется много задач на вычисление; часто встречаются задачи, решение которых удобно связывать с данными числами с помощью уравнения (во II ч.); не мало задач, решение которых требуется написать в виде буквенной формулы; наконец, встречаются преобразования буквенных выражений, находящиеся в соответствии с законами арифметических действий, напр., при выводе формул для вычисления площадей треугольника и четыреугольника.

VI. Пространственная интуиция. Большое значение в этом курсе геометрии придается пространственной интуиции, понимая это слово в смысле непосредственного восприятия геометрических истин, помимо какой бы то ни было их проверки. Интуиция основывается на развитом пространственном воображении. Отметим те места курса, которые особенно способствуют развитию воображения.

A. Деление фигуры на части и составление из них другой равносоставной фигуры.

B. Подвижные модели. Ценность их заключается в том, что они облегчают усмотрение главных свойств фигуры, иллюстрируют условия образования фигуры, показывают переход от данной фигуры к предельным ее формам.

C. Сечения тел.

D. Тела вращения.

E. Наконец, вопросы пространственного характера, которые требуют, чтобы учащийся представлял себе пространственные формы в любом положении, в движении и путем расчленения и сочетания форм создавал новые формы.

VII. Движение и преобразование. В книге уделяется большое внимание движению и преобразованию, как методам познавания геометрических форм. Подвижные модели, о которых была речь выше, иллюстрируют непрерывное видоизменение формы и в то же время постоянство некоторых свойств ее. Превращение одной фигуры в другие без изменения ее площади, симметрия осевая и центральная, равенство и подобие треугольников рассматриваются, как преобразования форм.

VIII. Логическая работа. Настоящий курс, главным образом в 2-ой его части, ставит себе цель—постепенно воспитать в учащихся

способность логически связывать добытые ими геометрические сведения. С этой целью в курсе, на ряду с опытом и интуицией, встречаются и рассуждения в форме доступных для детей соображений и заключений.

В конце курса мы прибегаем иногда к несложным доказательствам, которые представляют собою умозаключения, основанные чаще всего на утверждениях, добытых ранее опытно-интуитивным путем. Доказываются только такие утверждения, которые не вполне очевидны, вызывают сомнения и не требуют для доказательства сложных рассуждений.

Доказательству предшествует всегда опыт. Роль опыта заключается, с одной стороны, в том, чтобы натолкнуть учащегося на догадку, на предположение, а с другой, пробудить до известной степени сомнение в достоверности результата, полученного опытом. (См. во II части подход к выводу правила о сумме углов треугольника). Рассуждение разрешает вопрос о правильности догадки.

IX. Цели начального курса геометрии. В этой книге мы ставим своей целью выбрать такой материал, который имел бы для учащегося практическую ценность на его жизненном пути, и представить этот материал в такой форме, которая обеспечивала бы ему по возможности большее воспитательное и образовательное влияние на ученика.

Вместе с тем мы ставим себе и другую цель—подготовить ученика к доказательному курсу геометрии, сообщив ему достаточно подвижный запас геометрических представлений; развив его пространственное воображение воспитав в нем способность логически связывать добытые геометрические сведения и облекать свои суждения в более или менее точную словесную форму.

X. Распределение материала. По годам геометрический материал располагается следующим образом.

В первые два года обучения (кл. А и Б) занятия геометрией теснейшим образом связаны с арифметикой, служа для нее иллюстративным материалом.

3-ий год обнимает прямоугольные формы, т. - е. куб и квадрат, прямоугольный параллелепипед и прямоугольник.

4-ый год заключает, главным образом, треугольные формы—треугольник и треугольную призму (вычисление площади и объема).

В 5-ом году изучаются, главным образом, вопросы, связанные с равенством и подобием треугольников.

6-ой год посвящается изучению многоугольников и круглых форм.

Эта схема расположения материала показывает, что в настоящем курсе планиметрия и стереометрия не разделены. Опыт показывает, что наибольший интерес к геометрии и наибольшую продуктивность приобре-

тают занятия геометрией в том случае, когда изучение свойств геометрических форм, ручные работы, измерения и вычисления сближаются и чередуются. А это легче всего достигается при объединении стереометрии и планиметрии.

Если бы матерьял, предлагаемый в первой части „Курса Геометрии" оказался бы по каким-либо причинам чрезмерным, то его можно было бы сократить, отнеся прямой параллелепипед и параллелограмм (§§ 23—28) на 5-ый год обучения.

Для более подробного и обоснованного уяснения различных сторон и особенностей настоящего сочинения отсылаем читателя к прекрасным книгам—Методике и дидактике подготовительного курса геометрии—А. Р. Кулишера и Методике геометрии—Трейтлейна.

При изложении соотношений между русскими и метрическими квадратными мерами мы воспользовались очень хорошей книжкой Я. И. Перельмана «Старые и новые меры».

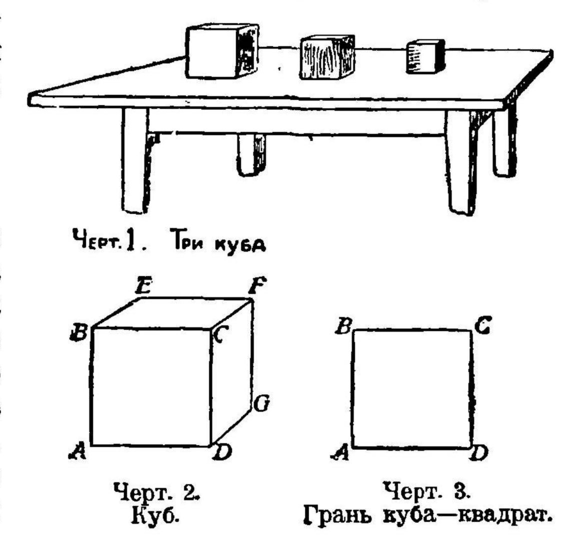
Курс геометрии в том виде, как он излагается в этой книге, прорабатывался под руководством автора в течение 12 лет в образцовых школах Петербургской Учительской Школы Губ. земства (ныне Института Н. О.). Методические основы его излагались на многих учительских курсах в России, Петербургской Педагогической Академии и в Педагогическом Институте.

Петербург, январь 1923 г. **И. Кавун.**

ГЛАВА I.

КУБ и КВАДРАТ.

Пред нами предметы, очень похожие по виду один на другой—один из дерева, другой из бумаги и третий глиняный (черт. 1). Каждый из них называется **кубом**. Рассмотрим внимательно куб, чтобы уметь затем самим его изготовить.



Черт. 1. Три куба

Черт. 2. Куб.

Черт. 3. Грань куба—квадрат.

1. Квадрат.

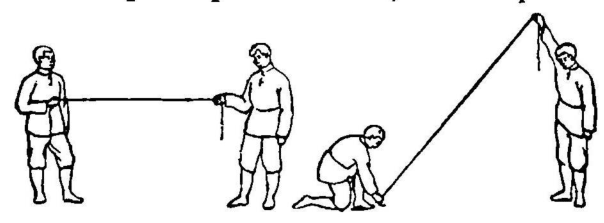
Грань. Рассмотрим один бок *ABCD* куба (черт. 2). Каждый бок куба обыкновенно называется **гранью** куба. Вспомните слово «граненый». О каком предмете говорят, что он граненый?

Задача I. Покажите все грани куба.

Плоскость. Посмотрим на грань куба. Проведите по ней рукой. На ней нет ни возвышений, ни углублений: она ровная. Ее можно назвать **плоской** или **плоскостью**. Плоскости мы встречаем не только на кубе. Поверхность зеркального стекла, спокойная поверхность воды, ровная поверхность доски стола могут служить примерами плоскости. Наоборот, поверхность мяча, яблока, круглой печки, человеческого тела — **кривая**.

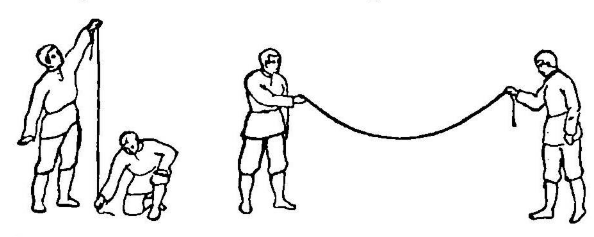
Задача 2. Покажите в классе плоские поверхности! кривые поверхности!

Прямая линия. Обведите края грани куба рукой: она ограничена четырьмя сторонами. Поместив одну из этих сторон против глаза, посмотрим вдоль нее так, как стрелок целится ружьем: она ровная, прямая. Поэтому ее называют прямой линией. Грань куба ограничена четырьмя прямыми линиями. Ребро линейки, край классной доски, натянутая нить — тоже прямые линии. В каком бы положении мы ни держали натянутую нить, она будет все же изображать прямую линию (черт. 4, 5 и 6). Наоборот, ослабив нить, мы уже не получим прямой линии: она будет изображать кривую линию (черт. 7).



Черт. 4. Горизонтальная прямая линия.

Черт. 5. Наклонная прямая линия.



Черт. 6. Отвесная прямая линия.

Черт. 7. Кривая линия.

Задачи. 3. Покажите в классе прямые линии! прямые наклонные линии!

4. Натяните вдвоем длинный шнур. Расположите его горизонтально, отвесно, наклонно. Он изображает во всех положениях прямую линию. Держите шнур так, чтобы он изображал кривую линию.

Прямая линия на плоскости. Приложим линейку ребром к плоской поверхности зеркального стекла. Мы не заметим нигде просвета между линейкой и стеклом. Отсюда видим, что прямую линию можно уложить всю, целиком на плоскости. Поворачивая линейку в разные стороны, не отнимая при этом от стекла, мы снова заметим, что ребро ее плотно прилегает к поверхности

стекла. Таким образом, прямую линию можно вращать так, что она все время будет находиться вся, целиком на плоскости.

Чтобы убедиться в том, что поверхность плоская, к ней прикладывают ребро правильной линейки и, поворачивая линейку, глядят, нет ли между нею и поверхностью просветов.

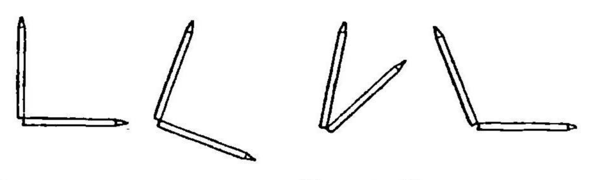
Точка. Рассмотрим две смежные (соседние) стороны одной грани куба (черт. 2), напр., *BA* и *BC*. Они встречаются; и то место В, где они встречаются, называется точкой. Концы прямой линии *BA*, отмеченные буквами *A* и *B*, зовутся также точками.

Задача 5. Указать на кубе три прямые линии, сходящиеся в одной точке.

Прямой угол. Прямые линии *AB* и *CB* сходясь образуют угол. Эти линии называются сторонами угла; место их встречи *A*—вершиной угла.

Угол *ABC* можно поставить в такое положение, что сторона его *BC* будет стоять на стороне *BA*—прямо. Поэтому и угол, который составляют эти стороны, называется прямым.

Задача 6. Поставьте один карандаш на другой прямо (черт. 8); какой угол заключается между ними?



Черт. 8. Прямые углы. Черт. 9. Непрямые углы.

Поставьте один карандаш на другой наклонно (черт. 9). Угол между ними теперь уже не будет прямым.

Квадрат. Взяв мерительную линейку, на которой отмечены сантиметры и миллиметры, измерим четыре стороны у грани куба. Таким образом убедимся, что они равны. Грань куба имеет четыре равные стороны, которые составляют четыре прямых угла Поставив куб одной гранью на бумагу, обведем ее карандашом. Получится плоская фигура, у которой четыре равных между собой стороны и четыре прямых угла (черт. 3). Она называется квадратом.

Задачи. 7. Покажите у куба все квадраты. Не видите ли квадратов в классе?

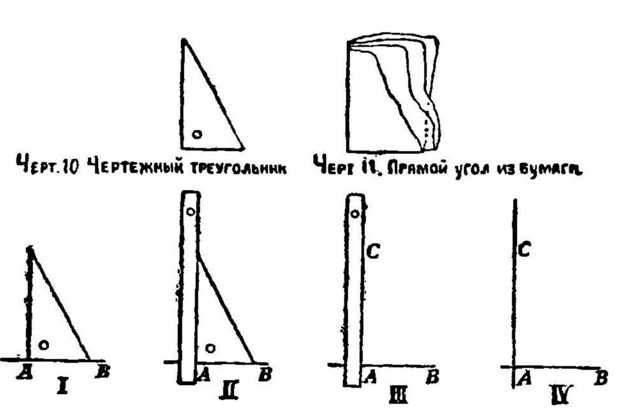
8. На данном кубе показать квадрат. Измерив одну сторону его, вычислить длину всех четырех сторон этого квадрата вместе. Длина всех четырех сторон квадрата называется **периметром** квадрата.

2. Построение квадрата.

Черчение прямой линии. Так как стороны квадрата— прямые линии, то, чтобы начертить на бумаге квадрат, надо научиться хорошо чертить прямую линию. Для этого следует иметь остро очиненный карандаш и линейку с прямым краем. Если готовой линейки нет, ее можно сделать из бумаги, перегнув листик бумаги несколько раз. Чтобы начертить прямую линию, на бумагу кладут линейку и плотно прижимают ее левой рукой. Затем вдоль края линейки проводят черту одним движением руки, не водя карандашом по одному месту несколько раз. Карандаш держать наклонно, слегка прижимая его к краю линейки. Прямые линии должны выходить при этом тонкими.

Задача 9. Начертить на бумаге несколько прямых линий в разных положениях.

Построение прямого угла. Так как углы квадрата прямые, то надо научиться чертить прямой угол. Для этого пользуемся **чертежным** треугольником (черт. 10). Если его нет, то хорошую модель прямого угла можно получить, изгибая вчетверо кусок бумаги (черт. 11). Построим прямой угол так, чтобы прямая линия AB была его стороной, а конец ее A — вершиной. Сперва надо

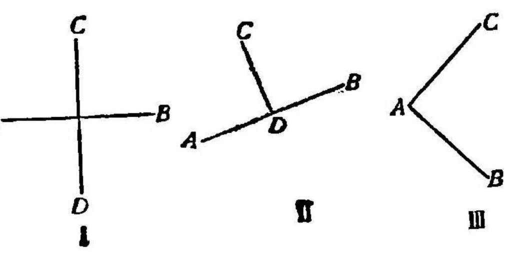


Черт. 10 Чертежный треугольник

Черт. 11. Прямой угол из бумаги.

Черт. 12. Построение перпендикуляра с помощью треугольника и линейки.

вообразить, как этот угол будет расположен. Одной стороной его будет линия *AB*: укажем ее направление движением руки от конца *A* к концу *B* прямой. Тогда другая сторона угла пойдет от точки *A* прямо вверх или вниз. (Показать направление ее движением руки!). Приложим чертежный треугольник к прямой линии *AB* так, чтобы вершина прямого его угла пришлась у самой точки *A* (черт. 12, I), сторона же прямого угла пошла вдоль прямой линии *AB*. Надо быть особенно внимательным к тому, чтобы сторона треугольника точно прилегала к прямой линии *AB*. После этого проводим черту вдоль другой стороны угла. Лучше выйдет угол, если к этой стороне треугольника плотно придвинуть линейку (черт. 12, II), и, убрав затем треугольник, провести черту вдоль линейки (черт. 12, III и IV).



Черт. 13. Перпендикулярные прямые.

Когда две прямые линии *AB* и *AC* образуют прямой угол, то о них говорят, что они **перпендикулярны** одна к другой. Две прямые на чертеже 13 (I, II и III) перпендикулярны одна к другой.

Задачи. 10. Начертить прямой угол на данной прямой линии *AB* при точке *B*.

11. Начертить прямой угол на данной наклонной прямой линии *CD* при точке *E*.

12. Провести прямую и на ней отметить точку. Чрез эту точку провести другую прямую, перпендикулярную к первой.

13. Начертить прямые в разных положениях. К каждой из них провести перпендикулярную прямую.

14. Указать на кубе, а потом и в классе прямые, перпендикулярные друг к другу.

15. Две пары учащихся натягивают две длинные тесемки. Расположить эти тесемки так, чтобы они были перпендикулярны одна к другой. Изменить положение одной и другой тесемки, но так, чтобы они все же были перпендикулярны.

Мерительная линейка. Приготовим себе **мерительную** линейку для измерения прямых линий. Пред нами

длинная линейка, называемая **метром**. Слово метр сокращенно будем обозначать буквой «м». Метр разделен на 10 равных частей, называемых **десиметрами** (обозначается «дм»).

$$1 \text{ м.} = 10 \text{ дм., или } 1 \text{ дм.} = \frac{1}{10} \text{ м.}$$

Каждый десиметр разделен также на 10 равных частей, которые называются **сантиметрами** (обозначаются «см»).

$$1 \text{ дм.} = 10 \text{ см., или } 1 \text{ см.} = \frac{1}{10} \text{ дм.}$$

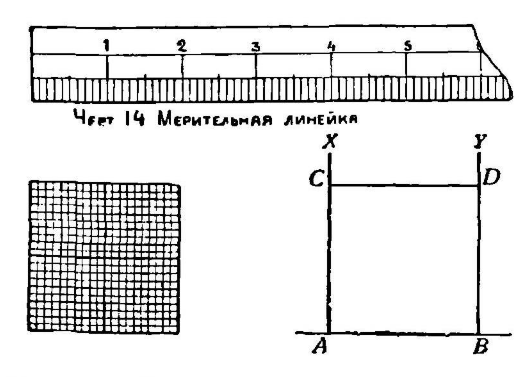
$$1 \text{ м.} = 100 \text{ см., или } 1 \text{ см.} = \frac{1}{100} \text{ м.}$$

Сантиметр делится на 10 равных частей, называемых миллиметрами (обозначаются «мм.»).

$$1 \text{ см.} = 10 \text{ мм., или } 1 \text{ мм.} = \frac{1}{10} \text{ см.}$$

$$1 \text{ м.} = 1000 \text{ мм., или } 1 \text{ мм.} = \frac{1}{1000} \text{ м.}$$

Приготовим линейку из толстой бумаги или из обыкновенной бумаги, сложенной втрое, длиной 20 см. с лишком. Положив на нее готовую линейку (масштаб), на которой уже нанесены сантиметры и миллиметры, отметим их карандашом (черт. 14).



Черт 14 Мерительная линейка

Черт. 15. Миллиметровая бумага.

Черт. 16. Построение квадрата.

Еще лучше приготовить мерительную линейку из особой, так называемой, миллиметровой бумаги, на которой отпечатаны мелкие квадратные клеточки; сторона каждой такой клеточки равна 1 мм. (черт. 15).

Параллельные прямые. Построим теперь квадрат, сторона которого равна 4 см. Проведя прямую линию, отме-

рим на ней мерительной линейкой $AB=4$ см. Чтобы отмерить на прямой 4 см., начиная от точки A, приложим линейку к прямой линии так, чтобы первая ее черта с цифрой нуль стояла как раз у точки A. При этом глаз должен быть расположен над точкой A. Затем на той же прямой ставим точку легким прикосновением карандаша против того деления линейки, на котором отмечена цифра 4. У точек A и B построим прямые углы (черт. 16).

Стороны этих углов AX и BY должны итти всюду на расстоянии 4 см. одна от другой. Проверить это можно с помощью мерительной линейки, которую кладем вблизи концов X и Y так, чтобы ее ребро с прямыми AX и BY составило прямые углы.

Расстояние между прямыми линиями здесь должно быть равно 4 см. Если этого не будет, то прямые AX и BY надо перечертить.

Если при проверке окажется, что прямые линии AX и BY идут всюду рядом друг с другом на одном и том же расстоянии, не сходясь и не расходясь, то прямые эти можно назвать параллельными.

Чтобы закончить квадрат, на прямых AX и BY, начиная от точек A и B, отмерим расстояния 4 см. Получим точки C и D, которые соединяем прямой линией. Фигура $ABCD$—квадрат.

Задачи. 16. На классной доске начерчен квадрат со стороной 60 см. На бумаге начертить его изображение, принимая миллиметр вместо сантиметра.

17. Построить квадрат со стороной 1 см., 1 дм., 1 дюйм и 1 верш.

Первый квадрат называется квадратным сантиметром, второй—квадратным десиметром, третий—квадратным дюймом и четвертый—квадратным вершком.

18. Дан квадрат. Вырезать из бумаги фигуру, одинаковую с ним по форме, но иной величины.

19. Вырезать из бумаги квадрат такой же величины, как и данный, и расположить его так, чтобы оба квадрата отличались положением.

20. Начертить параллельные линии на расстоянии 1 см. друг от друга! На расстоянии 3 см. друг от друга!

21. Указать в классе параллельные линии! Непараллельные линии!

22. Натянув два шнура (вчетвером); распололожить их так, чтобы они были параллельны друг другу.

3. Равные квадраты.

Начертить на бумаге два квадрата, стороны которых равны 6 см., и, вырезав эти квадраты, поставить у вершин одного буквы A, B, C и D, у вершин другого A_1, B_1, C_1 и D_1. Поверхность каждого квадрата имеет две стороны: одну из них назовем «лицом» и на ней поставим букву «Л»; а другую—«изнанкой» и отметим ее буквой «И».

Положив оба квадрата на стол лицом вверх, будем накладывать один на другой так, чтобы стороны AB и A_1B_1 совпали. Тогда совместятся стороны BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, AD и A_1D_1, а также совместятся и сами квадраты. Квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ совместимы, или равны.

Поворотим верхний квадрат так, чтобы сторона его AB совместилась со стороной B_1C_1, затем со стороной C_1D_1 и, наконец, со стороной A_1D_1.

Перевернув верхний квадрат изнанкой наверх, будем накладывать его на нижний так, чтобы сторона AB совместилась последовательно с каждой стороной нижнего квадрата.

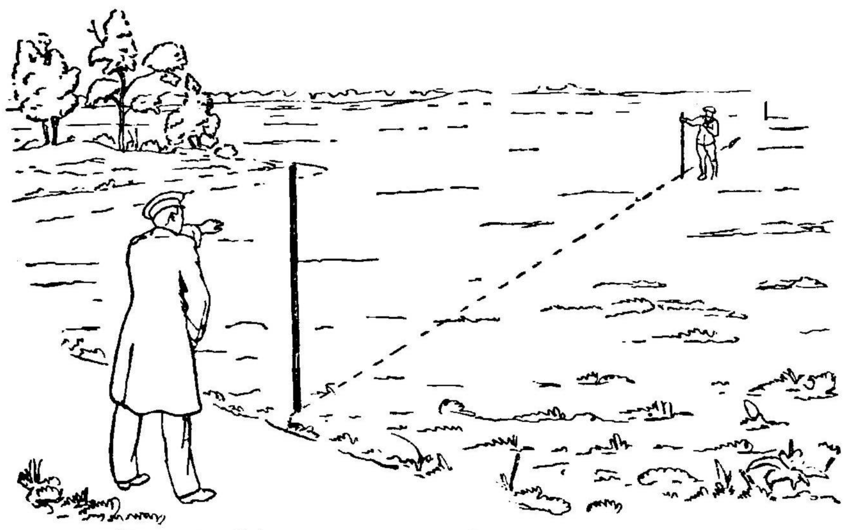
Следовательно, два равных квадрата можно совместить восемью способами.

4. Построение квадрата на местности.

На поверхности земли надо отметить квадрат, сторона которого равна 50 м. Чтобы построить такой квадрат, надо научиться сперва отмечать прямые линии на поверхности земли, отмерять на ней требуемые расстояния и строить прямые углы.

Прямая линия на местности. Прямая линия отмечается на земле вехами, т.-е. заостренными с одного конца деревянными палками, имеющими длину, несколько бо́льшую человеческого роста. Вехи будем ставить на расстоянии 50—60 шагов одну от другой. Чтобы обозначить на местности прямую линию, выбираем сперва два ее конца или две крайние ее точки и отмечаем их вехами, поставив вехи по возможности отвесно (черт. 17). Затем одно лицо становится за первой вехой, шагах в пяти от нее, а другое отходит по направлению к другой вехе шагов на 50 и ставит между ними третью веху в

таком месте, чтобы три вехи были расположены приблизительно на одной прямой линии. Это будет достигнуто, если первому лицу, смотрящему на первую веху, будет казаться, что она покрывает другие вехи. Если такого

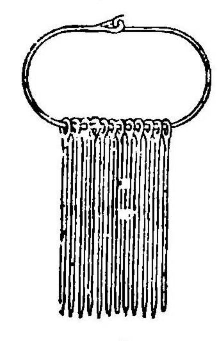


Черт. 17. Обозначение прямой линии на местности.

совпадения вех нет, то первое лицо подает рукой знак другому лицу, в какую сторону подвинуть его веху. Так же ставятся и прочие вехи.

Измерение расстояний на местности. Отметив тремя вехами прямую линию, отмерим на ней 50 м. Это сделаем с помощью мерительной веревки. Веревка берется толщиной в 5—6 мм. Концы ее завязываются в виде колечек. Расстояние между срединами колечек или 5 саж., или 10 м. Каждая сажень или метр отмечается на веревке небольшой жестяной бляшкой или ленточкой. Кроме того, одна сажень на ней делится на десятые части сажени, а метр — на десиметры. Чтобы концы веревки не держать в руках, чрез колечки продеваются две вехи, с помощью которых веревка при измерении натягивается. Чтобы колечки не сползли с вех, в эти вехи, вблизи заостренных их концов, вбивают по гвоздю. Измерение делают два лица: одно из них удерживает конец веревки около начальной, первой вехи, а другое

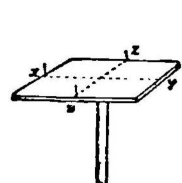
уходит вперед вдоль линии и натягивает веревку с помощью вехи. Первое лицо, глядя на эту веху, следит за тем, чтобы веревка ложилась вдоль прямой линии, отмеченной вехами. Натянув веревку, второе лицо втыкает у своей вехи шпильку (сделанную из куска проволоки, черт. 18) или небольшой колышек. Затем оба лица подвигаются с веревкой вперед, пока начало веревки не приблизится к шпильке. Первое лицо вытаскивает шпильку, а на ее место ставит свою веху и т. д. Число подобранных им шпилек покажет, сколько раз откладывалась веревка.



Черт. 18. Землемерные шпильки.

Отмерим таким образом вдоль прямой, отмеченной вехами 1, 2, 3 (черт. 20), расстояние AB=50 м.

Прямые углы на местности. Теперь у точек A и B надо построить прямые углы. Это делается с помощью прибора, называемого **эккером**, изображенного на черт. 19. Простейшее его устройство таково. На квадратном куске бумаги, сторона которого равна около 20 см., начерчены возможно точнее две прямые линии xy и zu, составляющие прямой угол (черт. 19). Этот кусок бумаги прикрепляется кнопками к квадратной планшетке, сделанной из дерева или из толстого картона и привинченной к концу палки, другой конец которой заострен. Если планшетка сделана из дерева, то поперек ее волокон следует прочно привинтить деревянный брус с дыркой посредине, в которую вставляется тупой конец палки.



Черт. 19. Эккер.

Черт. 20. Построение квадрата на местности.

На прямых xy и zu, у концов их, воткнуты четыре булавки. Заостренный конец палки служит для того, чтобы ее втыкать в землю. Чтобы палка лучше держа-

лась в земле, конец ее выгодно делать железным. В этом случае в ней просверливается продольное отверстие, в которое вставляется заостренный кусок железного прута. Заострить прут можно ударами молотка. Чтобы он не выскальзывал из палки, на той стороне прута, которая входит в палку, делаются поперечные зазубрины.

Эккер устанавливаем в точке A (черт. 20), поворачивая его в одну и в другую сторону, пока две булавки x и y не будут стоять на одной прямой с вехами 2 и 3. Глаз мы держим перед булавкой x, несколько поодаль от нее и добиваемся такого положения эккера, при котором булавка x покрывает булавку y и вехи 2 и 3.

Когда эта установка сделана, то ставятся вехи по прямой $A4$, проходящей чрез две другие булавки z и u. Угол A будет прямой. Так же отмечаем и другую прямую $B5$. Теперь остается на прямых линиях $A4$ и $B5$, начиная от точек A и B, отмерить расстояния AC и BD, равные 50 м. Следует еще проверить, равно ли расстояние CD 50-ти метрам. Вследствие неизбежных погрешностей при измерении углов и линий, длина CD будет несколько отличаться от 50 м. [1]).

5. Измерение длины.

Метрические меры. 1. Измерим длину, ширину и высоту классной комнаты. Для этого изготовим меру — метр. Вырежем полоску из толстой бумаги и с помощью готового метра отметим на ней один метр с десиметрами и сантиметрами. Сантиметры для большей отчетливости лучше закрасить или заклеить цветной бумагой через одно деление. Мы уже раньше узнали, что

1 м. = 10 дм.
1 дм. = 10 см.
1 см. = 10 мм.

Один метр приблизительно равен одной десятимил-

[1]) Результат надо признать совершенно удовлетворительным, если ошибка не превосходит $1/2$ м., т.-е. $1/400$ длины всех четырех сторон квадрата вместе, иначе говоря, суммы сторон квадрата или его периметра.

лионной части четверти земного меридиана, иначе говоря, земной меридиан заключает примерно 40.000.000 метров

Задачи. 23. Вычислить длину всех сторон (периметр) пола классной комнаты.

24. Измерить длину спички. Она равна 5 см. или 1/2 дм. Измерить длину неочиненного карандаша! ширину полулиста бумаги.

25. Сделать измерения своего роста, длины руки, указательного пальца, длины ноги, ширины груди, длины ступни. Написать полученные числа в тетрадь.

26. Оценить на глаз, а затем измерить длину, ширину и высоту школьного здания! длину и ширину двора и огорода.

27. Оценить на глаз длину коридора или другой комнаты! Проверить полученные числа измерением.

2. Отмерим вдоль прямой дороги при помощи мерной веревки расстояние 1000 м. Это расстояние называется *километром* (сокращенно—км.).

1 км. = 1000 м.

Пройдя один километр средним шагом, определим по часам, сколько минут на это потребуется.

Запись метрических именованных чисел. 1. Допустим что периметр школьного огорода равен 125 м. Это число заключает в себе единицы, десятки и сотни. Десяток в 10 раз больше единицы, и десятки пишутся по соседству с единицами слева. Сотня в 10 раз больше десятка, и сотни записываются по соседству с десятками слева от них. Положим теперь, что длина класса равна 7 м 8 дм. Как короче записать это число? 8 дм. = 8/10 м.; поэтому 7 м. 8 дм. равны 7 м. и 8/10 м. Один метр в 10 раз крупнее десятой части метра. Поэтому, следуя тому же правилу, по которому записано число 125 м., мы должны 7 записать слева от 8. Будем писать так 7,8 м. Если бы длина комнаты равнялась 7 м. 8 дм. 5 см., то мы записали бы ее 7,85 м. Числа 7,8 и 7,85 называются *десятичными* дробями.

2. Если бы нам надо было длину 3,45 м. выразить в десиметрах, иначе говоря, раздробить это число в десиметры, то мы рассуждали бы так: 3,45 м. = 3 м. 4 дм. 5 см. = = 34,5 дм. К тому же результату можно притти и иначе если длина заключает 3,45 метра, то десиметров в не будет в 10 раз больше. Увеличив 3,45 в 10 раз, получим 34,5 Раздробив 3,205 м. в сантиметры, получим 3,205 м. = 320,5 см

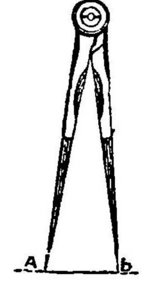
Из этих примеров и других подобных им видим, что, заменяя в именованных числах метры десиметрами, мы переносим запятую вправо через один знак; заменяя метры сантиметрами, переносим запятую вправо через два знака; заменяя метры миллиметрами, переносим через три знака.

Это правило можно связать с умножением десятичных дробей на 10, 100 и 1000.

Обратно, если бы нам надо было 320,5 см. превратить в метры, то мы могли бы рассуждать так: 320,5 см. = 3 м. 2 дм. 5 мм. = 3,205 м. Тот же результат можно получить и иначе. Длина какого-нибудь предмета заключает 320,5 см., а метров в той же длине будет, очевидно, в 100 раз меньше. Уменьшив 320,5 в 100 раз, получим 3,205.

Заменяя в именованном числе сантиметры десиметрами, мы запятую переносим влево на один знак: заменяя сантиметры метрами, переносим запятую на два знака влево и т. д. Это правило легко связать с делением десятичных дробей на 10, 100, 1000.

Русские меры 1. Вырежем полоску бумаги длиной в 1 фут и разделим ее на 12 равных частей следующим образом. Сперва перегнем пополам, далее каждую часть перегнем еще пополам. Полоска разделится на 4 равные части, каждая часть равна 1/4 фута.



Черт. 21. Циркуль.

Наконец, четверть фута разделим еще на 3 равные части путем проб. Для этого воспользуемся ц и р к у л е м. Прибор этот состоит из двух остроконечных ножек, соединенных шарниром (черт. 21) и потому раздвигающихся. Ножки часто делаются вставные, чтобы вставлять по желанию металлическое острие, карандаш или особое перо (рейсфедер). Растворив циркуль настолько, чтобы расстояние между остриями составило приблизительно одну треть полученной уже нами четверти фута, проверяем, укладывается ли на четверти фута это расстояние три раза. Если нет, то меняем его, пока оно не уложится в четверти фута ровно три раза. Разделив таким образом каждую четверть

фута на 3 равные части, мы целый фут разделим на 12 равных частей. Одна такая часть называется дюймом

1 фут = 12 дюйм.

Если дюйм разделить на 10 равных частей, то получим новые *меры—линии.*

1 дюйм = 10 лин.

Чтобы разделить дюйм на 10 равных частей, мы делим его сперва пополам (с помощью циркуля или перегибанием), а затем каждую часть делим на 5 равных частей на глаз.

Задачи. 28. Измерить длину и ширину стола! полулиста писчей бумаги.

29. Начертить на глаз прямую линию длиною в 1 фут, в 1 дюйм, в 1 линию.

30. Набрать столько листов из книги, чтобы общая их толщина равнялась 1 линии. Какую часть линии составляет толщина 1 листа!

31. Измерить длину спички!

2. Вырезав из бумаги полоску в 1 арш., разделим ее на 16 равных частей перегибанием:

1 арш. = 16 вершк.

Измерив аршин дюймами, получим, что

1 арш. = 28 дюйм.

Землемеры часто пользуются мерой, которая составляет одну сотую часть сажени и называется «соткой» Сотка несколько меньше дюйма, ибо в сажени соток 100, а дюймов 84.

3. Вдоль прямой дороги отмерить с помощью мерительной веревки 500 сажен. Длина 500 саж. носит название версты:

1 верста = 500 саж.

4. Когда расстояние на местности надо знать только приблизительно, его можно измерить для скорости шагами. Предварительно надо знать, скольким аршинам равны 100 шагов и 10 шагов измеряющего лица. Для

этого, отмерив 100 шагов, измеряем то же расстояние аршинами. Пусть, напр., 100 шагов равны 93 арш., тогда 10 шагов несколько больше 9 арш.

Найдем, сколько аршин будет заключать расстояние 237 шагов?

$$
\begin{array}{lcl}
200 \text{ шагов} = 93 \times 2 = 186 \text{ арш.} \\
30 \quad » \quad = \ 9 \times 3 = \ 27 \quad » \\
7 \quad » \quad = \qquad\quad\ \ 7 \quad » \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 220 \text{ арш.}
\end{array}
$$

Конечно, полученное число 220 арш. только приблизительное.

Задача 32. Измерить шагами длину двора! расстояние от дома до школы!

Замена метрических мер русскими и обратно. Измерим аршин сантиметром. Получим: 1 аршин равняется 71 см. с лишком.

Один аршин равен около 70 см.

Легко вычислить, сколько сантиметров в вершке. Вершок равен $4^1/_2$ см.

Один вершок содержит около 4,5 см.

Задача 33. Измерить длину класса аршином и вычислить, сколько метров она заключает.

Измерим фут сантиметром.

Один фут имеет около 30 см.

Легко вычислить, сколько в дюйме сантиметров.

Дюйм равен около $2^1/_2$ см.

2. Измерим метр вершком. Получим: 1 метр равен $22^1/_2$ вершкам, или $1^1/_2$ арш. без $1^1/_2$ вершков.

Один метр равен без малого $1^1/_2$ арш. или $^1/_2$ саж.

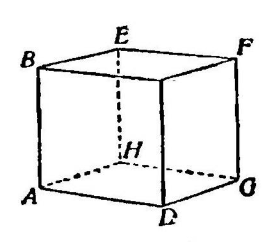
Задача 34. Ширина школьного двора равна 10 м. Сколько в ней сажен? Какую ошибку мы сделаем при решении этой задачи, приняв, что 2 м. = 1 саж.?

Так как 1 дюйм = 2,5 см., то 4 дюйма = 10 см., т.-е.

1 дециметр = 4 дюйм.

6. Куб.

Грани. Раньше, чем приступить к изготовлению куба, рассмотрим его повнимательнее. Поставим куб на стол. Нижняя его грань, на которой он стоит, называется нижним основанием; верхняя грань — верхним основанием. Прочие грани—боковые: передняя, задняя, левая, правая. Всех граней шесть. Грани куба—равные между собой квадраты. Все шесть граней куба составляют его поверхность.



Черт. 22. Куб.

Ребра. То место *DC* куба (черт. 22), где две грани сходятся, или пересекаются, называется ребром. Ребра куба—прямые линии. Попробуем сосчитать, сколько их. Возьмем для большей наглядности куб, составленный из палочек или проволочек, так сказать, скелет куба. Куб ограничен шестью гранями; каждая грань имеет по 4 стороны. Следовательно, 6 граней должны бы иметь 24 ребра. Посмотрим, так ли это на самом деле? Сосчитаем ребра в определенном порядке: сперва, напр., ребра у нижней грани, затем у верхней грани и, наконец, боковые ребра. Всех ребер у куба 12, а не 24. Отчего это? Рассмотрим ребро *DC*. Оно принадлежит передней грани и правой боковой грани. Оно представляет общую сторону двух граней. Отсюда видим, что, вычисляя ранее, сколько ребер у куба, мы каждое ребро посчитали два раза. Поэтому надо было 24 разделить на два.

Вершины. То место, в котором сходятся три грани куба, напр., точка *D* (черт. 22), называется вершиной куба. В той же точке сходятся или пересекаются и три ребра куба. Таких вершин у куба 8.

Задачи. 35. Покажите в воздухе двумя руками расположение граней куба—оба основания, переднюю и заднюю стороны, правую и левую стороны.

36. Покажите какое-нибудь ребро куба и те грани, для которых оно служит общей стороной.

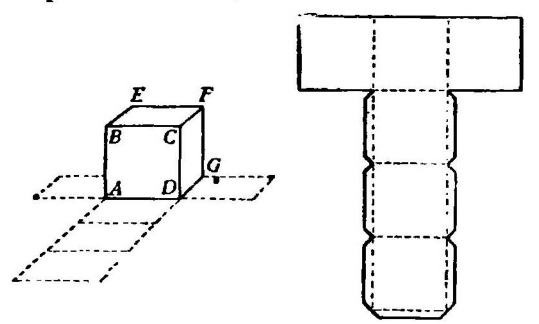
37. Покажите какую-нибудь вершину куба и те грани, которые сходятся в ней! те ребра, которые встречаются в ней.

38. Нарисуйте куб, у которого видны передняя, правая и верхняя грани! Передняя, верхняя и левая грани!

7. Приготовление куба.

1. Развертка поверхности куба. Чтобы склеить из бумаги (из тонкой папки или плотной обложечной бумаги) куб, надо сделать 6 его граней,—6 равных между собою квадратов. Однако, если эти квадраты будут взяты отдельно один от другого, не будут между собой никак соединены, то склеивание их представит некоторые трудности. Поэтому 6 квадратов, которые должны составить куб, вырезываются из одного куска бумаги и так, чтобы они были между собою соединены.

Как их расположить? Поставим готовый бумажный куб на стол и будем мысленно или на самом деле развертывать его поверхность так, чтобы вся она в конце концов расположилась на столе. Отделим сперва от куба правую грань, разрезывая его по ребрам *CD*, *CF* и *FG* (черт. 23). Эта грань остается прикрепленной к кубу по ребру *DG*. То же сделаем с левой гранью. Четыре прочие грани образуют как бы трубу, открытую справа и слева. Разрезав ее по одному из ребер, можно расположить все грани куба на столе (черт. 24). Таким образом получится плоская фигура, напоминающая букву *Т*; из этой фигуры можно снова составить куб. Она называется разверткой поверхности куба. Развертки куба могут иметь разные формы.



Черт. 23. Разворачивание куба.

Черт. 24. Развертка поверхности куба.

Задачи. 39. Начертить несколько различных разверток поверхности куба и вырезать их.

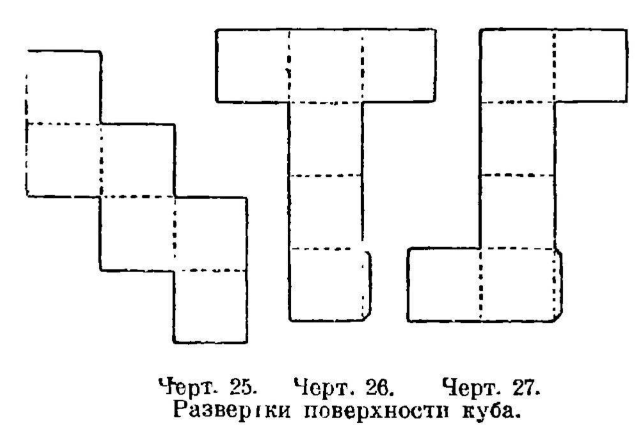
40. Расположить на столе 6 равных квадратов в виде буквы *Т* (как на черт. 26) так, чтобы они образовали форму раз-

вертки поверхности куба. Переставляя два боковых квадрата, показать разные другие виды развертки.

41. Вырезать из бумаги фигуру, показанную на черт. 25. Как ее свернуть, чтобы получился куб?

42. Сделать бумажную развертку кубического ящика, открытого с одной стороны.

Места для «запасов». Для склеивания куба в его развертке оставляются «запасы», загибы, которые смазываются тонким слоем жидкого столярного клея. Они отмечены на чер. 24. Чтобы ребра куба вышли как можно более прямолинейными, надо в тех местах развертки, в которых она изгибается, сделать острым предметом—булавкой или пером по линейке неглубокие царапины.



Черт. 25. Черт. 26. Черт. 27.
Развертки поверхности куба.

Оставляя в развертке запасы, надо сперва сообразить, какие стороны при изгибании ее должны сойтись. Тогда на одной из них запас оставляется, а на другой—нет.

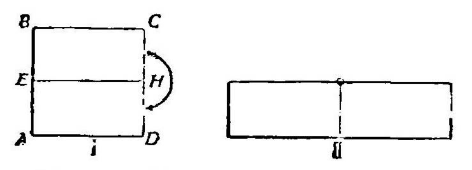
Задача 43. Если у стороны развертки, изображенной на черт. 26 или 27, сделать запас, отмеченный на чертеже, то у какой другой ее стороны запаса не надо оставлять?

Склеивание куба. Теперь изготовим куб. Для этого сделаем развертку из обложечной бумаги (какая употребляется для обложек на тетради), изображенную на черт. 24. Ребра возьмем равные 6 см., запасы достаточно взять шириной в $^1/_2$ см. Склеивать жидким столярным клеем.

Задача 44. Склеить из плотной бумаги открытый кубический ящик.

8. Деление квадрата.

Средняя линия. Вырезав квадрат из бумаги, перегнем его так, чтобы противоположные его стороны совпали. Линия изгиба *EH* (черт. 28) делит две другие стороны квадрата и самый квадрат пополам и называется средней линией. Так же найдем и другую среднюю линию квадрата.



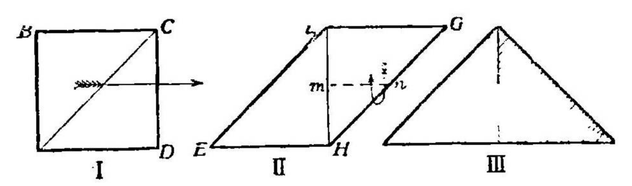
Черт. 28. Превращение квадрата I в прямоугольник II.

Рассмотрим фигуру *AEHD*. Она имеет четыре стороны, заключающих четыре прямых угла, и называется прямоугольником.

Разрезав квадрат вдоль средней линии *EH*, повернем прямоугольник *EBCH* вокруг точки *H* на пол-оборота. Получим новый прямоугольник II.

Две средние линии делят квадрат на четыре равных между собою квадрата.

Диагональ. 1. Перегнем квадрат *ABCD* (черт. 29) так, чтобы противоположные его вершины *B* и *D* совпали. В изгибе получится прямая линия *AC*, называемая диагональю.



Черт. 29. Превращение квадрата в параллелограмм II и в треугольник III, квадрат I разрезан по диагонали.

Разрезав квадрат *ABCD* (черт. 29) по диагонали, получим 2 фигуры *ABC* и *ADC*. Каждая из них называется треугольником. Треугольник имеет три стороны и три угла. Диагональ делит квадрат на два равных треугольника.

Треугольники *ABC* и *ADC* можем совместить следующими способами. 1) Поворачиваем один из них, напр., треугольник *ADC* вокруг диагонали *AC*, пока эти треугольники не совместятся. 2) Придерживая пальцем треугольник *ADC* посредине диагонали, поворачиваем его вокруг этой точки, пока оба треугольника не совместятся.

Задача 45. Сравните стороны AB и BC треугольника ABC: каковы они? Каков угол B у треугольника ABC (черт. 29).

2. Закрепив треугольник ADC неподвижно (с помощью кусочка хлеба), передвинем другой треугольник вправо так, чтобы его сторона AB слилась со стороной CD. Получим фигуру II, изображенную на черт. 29. Эта фигура имеет четыре стороны и четыре угла. Любые две противоположные стороны ее EF и HG или FG и EH параллельны между собою. Эта фигура называется параллелограммом.

Поворотим треугольник FHG (черт. 29) изнанкой вверх. Для этого, взяв треугольник EFH в левую руку, и треугольник GFH—в правую так, чтобы оба они составляли параллелограмм, будем вращать второй треугольник вокруг средней его линии mn, пока не получим новой фигуры—треугольника III.

3. Если разрезать квадрат по обеим диагоналям, то он разделится на четыре равных между собой треугольника.

Задача 46. Из двух квадратов составить один квадрат. Указание: надо каждый квадрат некоторым образом разрезать.

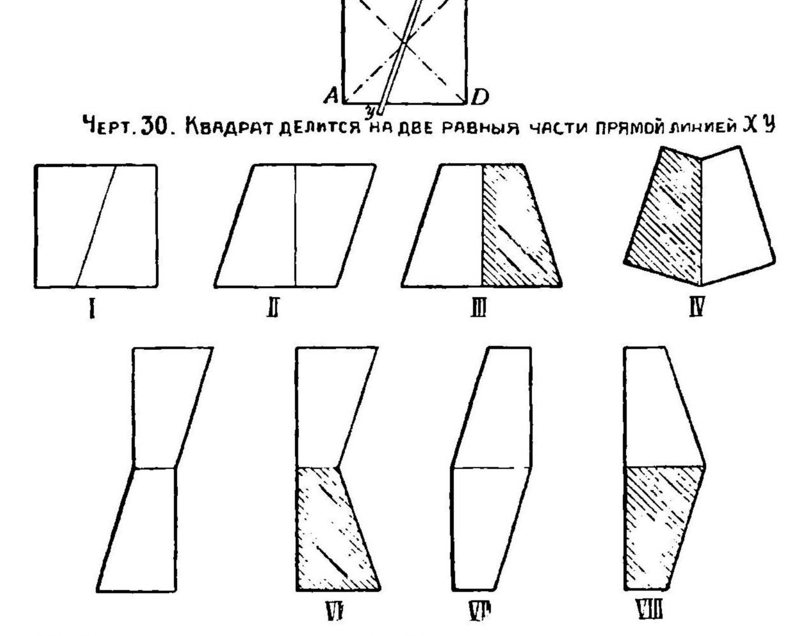
4. Проведем в квадрате две средние линии и две диагонали. Эти четыре линии пересекаются в одной общей точке и делят квадрат на восемь равных между собою треугольников.

Задача 47. Начертив треугольник, у которого один угол прямой, а стороны, заключающие этот угол, равны между собою, вырезать его. Вырезать еще 7 таких треугольников. Составить квадрат из двух таких треугольников! Из четырех таких треугольников! Из восьми треугольников!

Третий способ деления квадрата пополам. 1. Проведя в квадрате две диагонали (черт. 30), в точке пересечения их укрепим кнопкой узкую бумажную полоску xy. Будем эту полоску вращать вокруг кнопки. В любом положении эта полоска делит квадрат на две равные фигуры. Она может при этом вращении принять положение диагонали и средней линии.

Рассмотрим фигуру $yxCD$. Она имеет 4 стороны: две из них xC и yD параллельны. Фигура эта называется трапецией.

2. В квадрате $ABCD$ (черт. 30) на противоположных его сторонах AD и BC отложим равные отрезки Bx и Dy и затем точки x и y соединим. Разрежем квадрат по линии xy: получим две равные трапеции. Чтобы убедиться, что они равны, наложим одну из них на другую, вращая трапецию $xyCD$ вокруг средины прямой xy.



Черт. 30. Квадрат делится на две равныя части прямой линией X Y

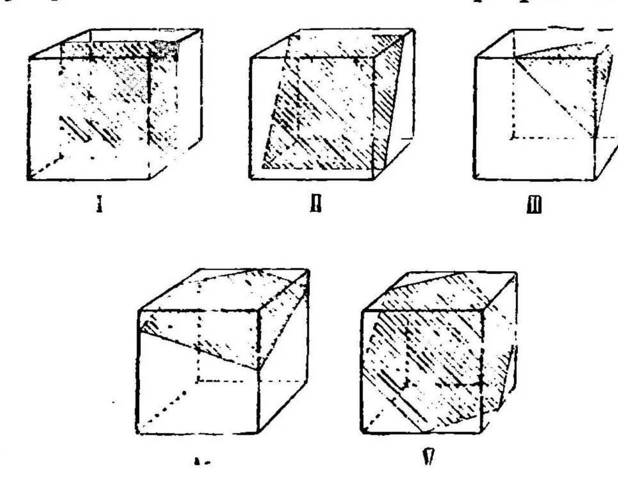
Черт. 31. Превращение квадрата I. Превращение достигается движением одной из частей его по плоскости (фигуры II. V, VII) или, кроме того, переворачиванием ее на изнанку (фиг. III, IV, VI, VIII).

3. Из двух равных трапеций $ABxy$ и $xyCD$ образуем новые фигуры (черт. 31): параллелограмм II получаем, заставляя скользить левую трапецию вправо, пока ее сторона AB не совпадет со стороной CD. Трапецию III получим из параллелограмма II, переворачивая правую его часть на изнанку. «Изнанка» квадрата $ABCD$ окрашена в иной цвет, нежели его «лицо», поэтому те части его, которые на чертеже обращены к нам изнанкой, окрашены в темный цвет.

Задача 48. Как получены из квадрата I фигуры IV, V, VI, VII, VIII?

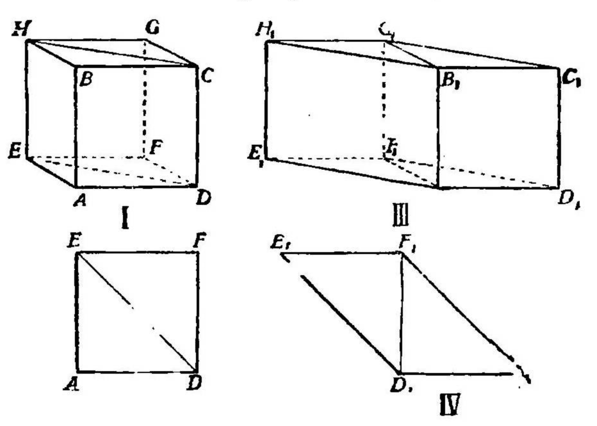
9. Сечение куба.

Плоские сечения. Слепив из глины куб, разрежем его натянутой ниткой или тонкой проволокой так, чтобы разрез вышел плоский. Этот разрез назовем плоским сечением. Рассекая таким образом куб, можно получить разные сечения: квадрат (чер. 32, I), прямоугольник — у куба II, треугольник—у куба III, пятиугольник—у куба IV и шестиугольник у куба V.



Черт. 32. Плоские сечения куба: у куба I — квадрат; у куба II — прямоугольник; у куба III треугольник; у куба IV — пятиугольник; у куба V — шестиугольник.

Преобразование куба. Рассечем куб на две части так, чтобы разрезывающая его нить все время проходила по противоположным ребрам *EH* и *CD* (черт. 33, I). Сечение называется диагональным. Фигура *EDCH* есть прямоугольник.



Черт. 33 Превращение куба I в прямой брус III (параллелепипед). Квадрат II—основание куба I; параллелограмм IV—основание бруса III.

Мы разрезали куб на две части. Каждая из них называется призмой. Обе полученные призмы равны. Из этих призм мы можем составить

предметы иной формы, чем куб: прямой брус или параллелепипед и призму. На черт. 33 изображены прямой брус III (параллелепипед) и основание прямого бруса.

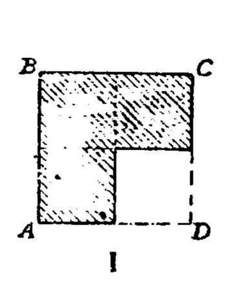
Задача 49. Из двух частей куба I (черт. 32) составить призму основание которой было бы треугольное.

Куб, призма, параллелепипед это — геометрические тела. Кроме этих тел, мы будем встречать и другие геометрические тела.

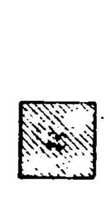
10. Площадь квадрата.

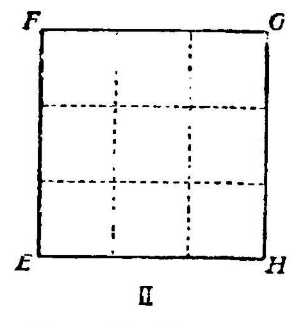
Измерение площади квадрата. Начертив квадрат $ABCD$, стороны которого равны 2 см. (черт. 34). отметим на них точками сантиметры и соединим эти точки так, чтобы квадрат разделился на квадратные клетки. Всех таких клеток в нем 4. Вырежем одну из них x (чер. 34). Стороны квадрата x равны 1 см., и сам квадрат x называется квадратным сантиметром. Таким образом, квадрат, сторона которого равна сантиметру, называется квадратным сантиметром.

Поверхность квадрата I заключает 4 квадратных сантиметра.



Черт. 34. Квадрат, заключающий 4 кв. сантиметра.


Квадратный сантиметр.



Черт. 35. Квадрат, заключающий 9 кв сантиметров.

Так же можно разделить на квадратные сантиметры и квадрат $EFGH$ (черт. 35), стороны которого равны 3 см.

Сосчитаем, сколько квадратных сантиметров помещается в этом квадрате. Сторона EF квадрата заключает

3 см.; поэтому квадрат разделится на 3 полосы. Ширина одной полосы 1 см., длина 3 см. Так как сторона *EH* полосы равна 3 см., а ширина 1 см., то в полосе заключается 3 кв. сантиметра. Чтобы узнать, сколько кв. сантиметров во всем квадрате, надо 3 кв. см. умножить на 3, получим 9 кв. см:

3 кв. см. × 3 = 9 кв. см.

Задачи. 50. Начертить на глаз квадратный сантиметр. Проверить его.

51. Начертить квадрат, сторона которого равна 4 см. Разделить его на кв. сантиметры и сосчитать, сколько их?

52. Сколько кв. сантиметров поместится на поверхности квадрата, сторона которого равна 10 см.? 12 см.? 20 см.?

Сравнивая поверхности двух квадратов I и II (черт. 34 и 35), мы находим, что у второго квадрата она больше, чем у первого. Иначе говоря, площадь одного квадрата больше, чем площадь другого.

На поверхности квадрата II помещается 9 кв. сантиметров, поэтому говорят: площадь квадрата II равна 9 кв. сантиметрам.

Итак, чтобы найти площадь квадрата, надо измерить его сторону и полученное число умножить само на себя, или короче говорят:

Чтобы вычислить площадь квадрата, надо умножить его сторону саму на себя.

Задачи. 53. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 9 см.! 25 см.!

54. Вычислить площадь поверхности куба, ребро которого равно 10 см.

55. Сточная труба имеет в поперечном сечении квадрат, сторона которого 33 см. Вычислить площадь сечения.

Квадраты чисел. Вместо того, чтобы писать 3 × 3, пишут 3^2. Значок 2 над числом 3 показывает, что 3 взято сомножителем два раза. Читается запись так: 3 возвысить во вторую степень, или 3 возвысить в квадрат, или, еще проще, квадрат числа 3.

Задача 56. Что значит 10^2? Чему равно 10^2?

Вот таблица квадратов первых двадцати целых чисел Она дает возможность по данной стороне квадрата, если эта сторона имеет не больше 20 единиц, узнать его площадь.

$1^2=1$	$5^2=25$	$9^2=81$	$13^2=169$	$17^2=289$
$2^2=4$	$6^2=36$	$10^2=100$	$14^2=196$	$18^2=324$
$3^2=9$	$7^2=49$	$11^2=121$	$15^2=225$	$19^2=361$
$4^2=16$	$8^2=64$	$12^2=144$	$16^2=256$	$20^2=400$

Сравнение площадей квадратов. Из 9 равных квадратиков (напр., кв. сантиметров) составим квадрат. Для этого в ряд положим по 3 квадратика и таких рядов наберем 3 (черт. 35). Сравним теперь сторону большого квадрата *EFGH* и сторону маленького квадрата x (черт. 34), а затем сравним и площади этих квадратов:

У квадрата *EFGH* сторона 3 см., площадь 9 кв. см.
У квадратика x сторона 1 см., площадь 1 кв. см.

Отсюда видим, что в то время как сторона первого квадрата только в три раза больше стороны второго квадрата, его площадь в 9 раз, т.-е. в трижды три раза, или в 3^2 раз, больше площади первого квадратика.

Задачи. 57. Вырезать из бумаги два квадрата: сторона одного 2 см., сторона другого 6 см. Сколько раз первый квадрат уложится на втором?

58. Сторона квадратного листа золоченой бумаги равна 30 см. Сколько из него можно вырезать квадратиков со сторонами в 5 см.?

59. Серебряная квадратная пластинка, сторона которой 2 см., весит $1\frac{2}{5}$ гр. Сколько весит квадратная серебряная пластинка такой же толщины, как и первая, если ее сторона равна 10 см.?

Квадратный корень из числа. Отыскивая длину стороны квадрата, площадь которого равна, напр., 169 кв. см., мы подбираем такое число, чтобы, при умножении его само на себя, получить 169. Такое число можно найти или с помощью проб, или по таблице, напечатанной выше. Оно равно 13; следовательно, сторона квадрата равна 13 см. Число 13 называется квадратным корнем, или корнем второй степени из 169. Требование—

найти квадратный корень из 169 обозначают так: $\sqrt{169}$ Значит

$$\sqrt{169} = 13$$

Вместо того, чтобы говорить—найти квадратный корень из 169, говорят: извлечь квадратный корень из 169.

Задачи. 60. Найти сторону квадрата, площадь которого равна 16 кв. см.! 36 кв. см.! 100 кв. см.! 324 кв. см.! 625 кв. см.!

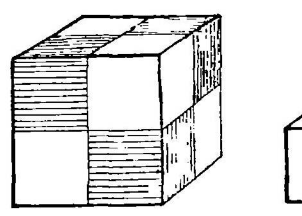
61. Извлечь квадратный корень из 81! из 441!

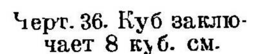
62. Составить квадрат из 25 равных квадратиков. Во сколько раз сторона получившегося квадрата больше сторон каждого из данных квадратиков? Во сколько раз площадь большого квадрата больше площади каждого данного квадратика?

63. Можно ли составить квадрат из 10, из 15, из 30 равных между собою квадратиков (не разрезывая их)?

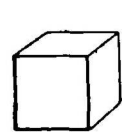
11. Объем куба.

Измерение объема куба. Пред нами кубик, ребро которого равно 1 см. (черт. 37). Такой кубик называется кубическим сантиметром. Набрав много таких кубиков, составим из них новый куб, ребро которого равно 2 см. Для этого кладем в ряд 2 кубика. Получим брусок, ребра которого равны 2 см., 1 см. и 1 см. К нему придвинем такой же брусок: получится слой, ребра которого 2 см., 2 см. и 1 см. Этот слой имеет 4 куб. см., ибо





Черт. 36. Куб заключает 8 куб. см.



Чер. 37. Куб. сантиметр.

2 куб. см. $\times$ 2 = 4 куб. см.

На этот слой поставим еще такой же слой. Получим куб (черт. 36), ребро которого равно 2 см. Чтобы узнать сколько в нем куб. сантиметров, надо 4 куб. см. умножить на 2:

4 куб. см. $\times$ 2 = 8 куб. см.

Таким образом, полученный куб заключает 8 куб. см. Узнали мы это двумя действиями: сперва узнали, сколько

кубических сантиметров в одном слое, а затем, сколько их в целом кубе.

Оба действия можно записать в одну строчку:

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{(куб. см.)}.$$

Задачи 64. Составить из кубических сантиметров куб, ребро которого равно 3 см.! 4 см.! Сколько понадобится кубических сантиметров?

65. Сколько кубических сантиметров заключается в кубе, ребро которого равно 10 см.? 12 см.? 20 см.?

Сравнивая два куба, изображенные на черт. 36 и 37, мы видим, что один из них больше другого. Иначе говорят: *объем одного куба больше объема другого куба*. (Слово „объем“ сравните со словом „обнять“).

Куб, изображенный на черт. 36, состоит из 8 куб. сантиметров; иначе говорят: *объем куба равен 8-ми кубическим сантиметрам*.

Чтобы найти объем куба, надо измерить его ребро, умножить полученное число само на себя и найденное произведение умножить еще раз на то же число. Иначе говорят: *чтобы вычислить объем куба, надо ребро куба взять сомножителем три раза.*

Куб числа. Вместо того, чтобы писать

$$2 \times 2 \times 2,$$

пишут

$$2^3.$$

Здесь цифра 3, поставленная над числом 2, показывает, что 2 взято сомножителем 3 раза. Читается запись 2^3 так: „2 возвысить в третью степень“, или „2 возвысить в куб“, или проще „куб числа 2“.

Задача 66. Что зн чит 10^3? Чему равно 10^3?

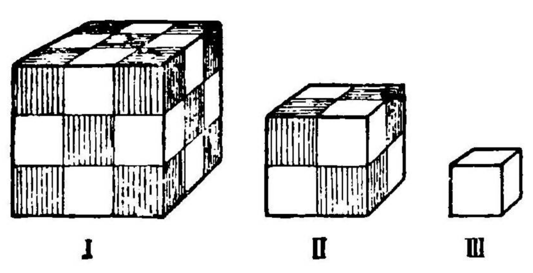
Вот таблица кубов первых 10 целых чисел:

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$

Сравнение объемов кубов. Составим из кубических сантиметров два куба: у одного куба I (черт. 38) ребро равно 3 см., у другого куба II (черт. 39)—2 см. Рядом с ними поставим кубик III (черт. 40), ребро которого равно 1 см.

У куба III ребро 1 см., объем 1 куб. сантиметр
„ „ II „ 2 „ „ 8 „ „
„ „ I „ 3 „ „ 27 „ „

Сравнивая куб II и куб III, находим, что ребро куба II вдвое больше ребра куба III, а объем куба II в 8 раз больше, т.-е. в 2^3 раз больше объема кубика III. Сравнивая кубы I и III, видим, что в то время как ребро первого из них втрое больше ребра второго, объем первого в 27 раз, т.-е. в 3^3 больше объема второго куба.



Черт. 38. Ребро 3 см. Объем его $3 \times 3 \times 3 = 27$ (кубич. см.).

Черт. 39. Ребро 2 см. Объем $2 \times 2 \times 2 = 8$ (куб. см.)

Черт. 40. Ребро куба 1 см. Объем— 1 куб. см.

Задачи. 67. Во сколько раз объем одного куба больше объема другого, если ребро первого куба равно 10 см., а второго 2 см.?

68. Найти ребро куба, составленного из 343 куб. сантиметров.! из 125 куб. см.!

69. Металлический куб имеет ребро 8 см. Сколько из него можно сделать кубиков, ребра которых равнялись бы 4 см.?

70. Кусок масла спрессован в виде куба, ребро которого равно 15 см. На сколько кубиков можно разрезать этот кусок, чтобы ребро каждого из них было равно 5 см?

Кубический корень. Отыскивая длину ребра куба, составленного, напр., из 125 куб. сантиметров, мы подбираем такое число 5, чтобы произведение $5 \times 5 \times 5$ равнялось 125. Короче говоря, мы ищем такое число, куб которого равен 125. Число 5 называется корнем 3-ей степени из 125, или кубическим корнем из 125. Значит, извлекая корень 3-ей степени из 125, мы отыскиваем число, третья степень которого равна 125. Извлечение корня третьей степени записывается так:

$$\sqrt[3]{125} = 5.$$

Проверяется найденный кубический корень умножением или, вернее, возвышением в третью степень. Так,

$$\sqrt[3]{125}=5, \text{ потому что } 5.5.5=5^3=125$$

$$\sqrt[3]{8}=2, \text{ потому что } 2.2.2=2^3=8$$

Задачи. 71. Найти сторону куба, объем которого равен 216 куб. см.! 512 куб. см.! 1000 куб. см.! 1.000.000 куб. см.!

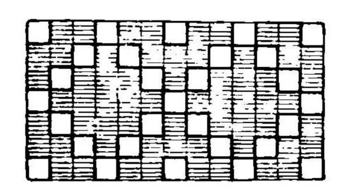
72. Извлечь кубический корень из 343! из 1728!

73. Можно ли составить куб из 26 равных кубиков? Из 65 кубиков?

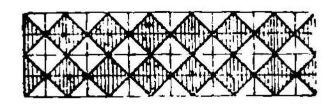
12. Орнаменты.

Здесь изображены орнаменты (украшения), в которых квадрат занимает главное место.

Орнаменты 41 и 42 удобнее всего сделать на квад-



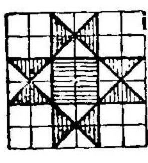
Черт. 41.



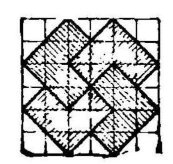
Черт. 42.

ратно-клетчатой бумаге, и затем орнамент 41 раскрасить в два цвета, а 42 одним цветом вперемежку.

Орнаменты 43 и 44 сделать, деля стороны квадратов на 3 равные части. Причем орн. 44 удобно сделать из цветной бумаги. Большой квадрат вырезывается из бумаги и на него наклеиваются две пары малых квадратов, каждая пара иного цвета.

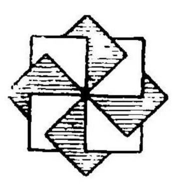


Черт. 43.

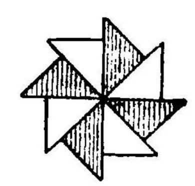


Черт. 44.

Орнамент 45 делается из 8 равных квадратов: 4 вырезываются из бумаги одного цвета, а 4 других из бумаги другого цвета.



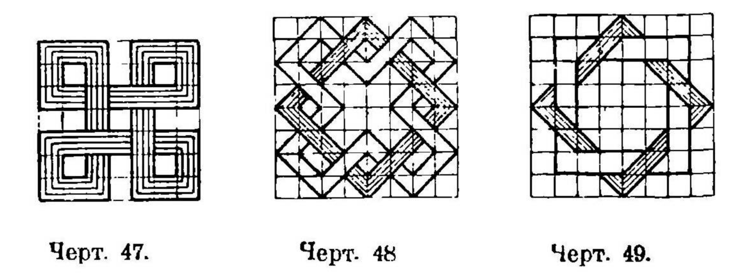
Черт. 45.



Черт. 46.

Орнамент 46 делается из 8 равных треугольников: 4—одного цвета и 4—другого цвета. Треугольники можно получить, разрезывая 2 квадрата по диагоналям.

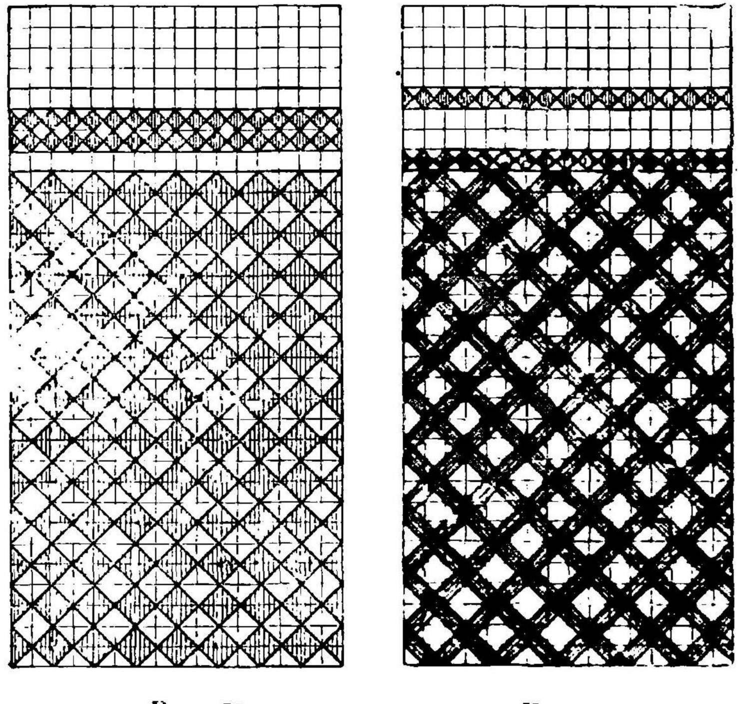
Орнамент 47 (плетушка) получается делением сторон



Черт. 47. Черт. 48 Черт. 49.

квадрата на 7 равных частей, а орнам. 48—на 8 равн. частей.

Орнамент 49 получается из двух квадратных разно-



Чер . 50. Черт. 51.

цветных бумажных рамочек. Чтобы их переплести, надо одну из них разрезать. Следует сперва убедиться в том,

что ширина рамочек не может быть какая угодно. Для этого достаточно вырезать две рамочки и попробовать их переплести.

Фигуру 49 можно начертить на клетчатой бумаге так: если сторону квадрата поместить на 20 клетках, то ширину рамочек следует взять в 3 клетки.

Чертежи 50 и 51 представляют собой изображения изразцов или кафель. Это квадратные плитки, чаще всего раскрашенные, из которых складываются печки и камины.

Задача 74. Начертить несколько орнаментов, в которых квадрат занимал бы главное место!

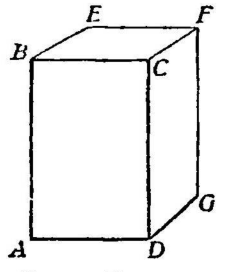
ГЛАВА II.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БРУС (параллелепипед) и ПРЯМОУГОЛЬНИК.

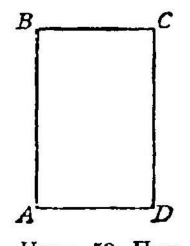
Пред нами прямоугольный брус (прямоугольный параллелепипед). На чертеже 52 его изображение. Рассмотрим сперва этот брус внимательно, а затем сделаем его.

13. Прямоугольник.

Описание прямоугольника. Рассмотрим одну из граней прямоугольного бруса, напр., грань *ABCD*. Отдельно она изображена на черт. 53. Это—плоская фигура. Обведите ее края рукой: она ограничена четырьмя прямыми линиями, иначе говоря, имеет четыре стороны. Ее стороны образуют четыре прямые угла. Поэтому фигуру *ABCD* называют прямоугольным четыреугольником или прямоугольником.



Чер. 52. Прямоугольный брус (параллелепипед).

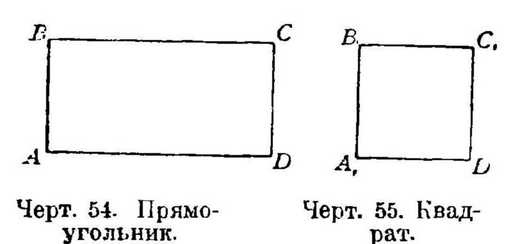


Черт. 53. Прямоугольник.

Сравнивая стороны прямоугольника, находим, что две из них AD и BC равны и параллельны, и две другие AB и CD тоже равны и параллельны. Короче говоря, стороны прямоугольника попарно параллельны и равны Приложив параллельный брус к бумаге (или к доске гранью $ABCD$, обведем эту грань карандашом (или мелом). Получим прямоугольник.

Задача 75. Указать в классе прямоугольники. Какую форму имеет классная доска, стена, пол-листа бумаги?

Черчение прямоугольника. Начертим прямоугольник, стороны которого равны 2 см. и 4 см. Проведя прямую, отложим на ней отрезок $AD=4$ см. (черт. 54). У концов его A и D проведем к нему две перпендикулярные линии AB и DC. Эти линии должны быть параллельны, если при точках A и D верно построены прямые углы. Проверим, параллельны ли они. Для этого измерим расстояние между ними где-либо подальше от концов A и D: это расстояние должно равняться 4 см. Затем на перпендикулярах откладываем, начиная от точек A и D, отрезки AB и DC, равные 2 см., и соединяем точки B и C. Прямая BC должна составить прямые углы с линиями AB и DC. Фигура $ABCD$— прямоугольник.



Черт. 54. Прямоугольник.

Черт. 55. Квадрат.

Сравнение прямоугольника и квадрата. Сравнивая прямоугольник $ABCD$ и квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (черт. 54 и 55), посмотрим, в чем у этих фигур сходство?

Сходство:

У квадрата—	У прямоугольника—
Четыре стороны.	Четыре стороны.
Четыре угла.	Четыре угла.
Углы прямые.	Углы прямые.
Противоположные стороны равны.	Противоположные стороны равны.
Противоположные стороны параллельны.	Противоположные стороны параллельны.

Посмотрим теперь, чем различаются формы прямоугольника $ABCD$ и квадрата $A_1B_1C_1D_1$.

Различие:

У квадрата—	У прямоугольника—
Смежные стороны равны.	Смежные стороны неравны.

Задачи. 76. Возьмите в руку прямоугольник, вырезанный из плотной бумаги, и поставьте его на длинную сторону! на короткую сторону! Держите его так, чтобы две стороны были отвесны! чтобы все стороны были горизонтальны! чтобы все стороны были наклонны, а плоскость прямоугольника была отвесна!

77. Начертить прямоугольник, стороны которого равны 12 лин. и 18 лин.

78. Начертить два каких-либо отрезка прямой и построить прямоугольник, у которого стороны были бы равны этим отрезкам.

79. Начертив прямоугольник, укоротить две его стороны настолько, чтобы получился квадрат! Удлинить две его стороны так, чтобы получился квадрат.

80. Стороны прямоугольника 193 см. и 87 см. Вычислить длину линии, ограничивающей этот прямоугольник (периметр или обвод).

Равные прямоугольники. Начертив на бумаге два прямоугольника, стороны которых 8 см. и 5 см., вырежем их. Наложим их один на другой так, чтобы короткая сторона одного и короткая сторона другого совпали. Тогда и длинные стороны их совместятся, и две другие короткие стороны их совпадут. Сами прямоугольники совместятся и потому они могут быть названы совместимыми или равными.

Наложение прямоугольников мы могли бы начать и с длинных сторон.

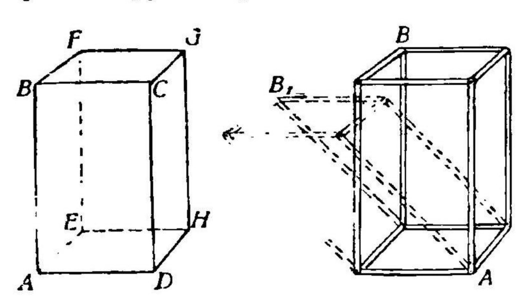
Задачи. 81. Один из двух равных прямоугольников положить на стол и положения его не менять. Наложить другой прямоугольник на него так, чтобы оба прямоугольника совместились. Сколькими способами можно совместить эти два прямоугольника? (Четырьмя).

82. Указать в классе равные прямоугольники!

83. Начертить прямоугольник, у которого сторона равнялась бы $3^1/_2$ см. Много ли можно начертить различных по величине прямоугольников, у которых сторона равнялась бы $3^1/_2$ см.? Можно ли начертить хотя бы два разных по величине квадрата, у которых сторона равнялась бы $3^1/_2$ см.?

14. Прямоугольный брус (параллелепипед)

Грани. Сделаем прямоугольный брус из плотной бумаги. Для этого рассмотрим форму прямоугольного бруса. Форму прямоугольного бруса имеют кирпич, ящики, сундуки и другие предметы. Поставим его на стол (черт. 56). Та грань *AEHD*, на которой он стоит, называется **нижним основанием**. Против нее находится грань *BFGC*, называемая **верхним основанием**. С боков прямоугольный брус ограничен четырьмя **боковыми гранями**.



Черт. 56. Прямоугольный брус (параллелепипед)

Черт. 57. Прямоугольный и наклонный брусы.

Таким образом он имеет **шесть** граней или сторон.

Прямоугольный и непрямоугольный брус (параллелепипед). Грани *ABCD* и *HDCG* встречаясь образуют прямой угол, который находится внутри бруса. И любые две грани прямоугольного бруса, которые сходятся, образуют прямой угол. Так как этот угол образуется двумя гранями, то он называется **двугранным**. И ребра прямоугольного бруса, которые встречаются, напр., ребра *BA* и *DA*, составляют прямой угол. От этого все шесть граней бруса — прямоугольники, и сам брус называется прямоугольным.

Брусы (параллелепипеды) бывают и непрямоугольные, наклонные. Взяв брус, составленный из палочек, соединенных шарнирами (винтиками) (черт. 57), придадим ему форму прямоугольного бруса *AB*. Оставив его основание неподвижным, наклоним боковые ребра. Брус AB_1 получится непрямоугольный.

Противоположные грани бруса. Возвратимся снова к прямоугольному брусу. Сравним на глаз верхнее и нижнее основания его, правую и левую его грани, переднюю и заднюю грани: любые две противо-

положные грани бруса равны между собою и параллельны.

Таким образом, у прямоугольного бруса — шесть граней, все они прямоугольники. Среди них могут быть и квадраты. Любые две противоположные грани равны и параллельны.

Задачи. 84. Назовите предметы, имеющие форму прямоугольного бруса.

85. Можно ли полулист бумаги назвать прямоугольным брусом?

86. Взяв в руки прямоугольный брус, держать его так, чтобы его основание было горизонтально. Есть ли в нем еще горизонтальные грани? Показать отвесные грани!

Вращать брус так, чтобы две грани оставались горизонтальны!

Вращать брус так, чтобы две грани постоянно оставались отвесны.

Держать брус так, чтобы ни одна грань не была горизонтальна, а ребро было горизонтально. Взять брус так, чтобы ни одна грань и ни одно ребро не были горизонтальны.

Сколькими способами можно поставить на стол брус?

Ребра бруса. Рассматривая модель прямоугольного бруса, составленную из проволок или из деревянных прутиков, на которой изображены только ребра (черт. 56), мы заметим, что ребро CD принадлежит двум граням, иначе говоря, двум прямоугольникам $ABCD$ и $DCGH$. Всего ребер у бруса 12. Боковые ребра его AB, EF, HG и DC равны.

Три ребра прямоугольного бруса, встречающиеся в одной точке, напр., ребра AD, HD и CD иногда называются так: AD—длиной прямоугольного бруса, HD—шириной и CD—высотой. Длину, ширину и высоту бруса иногда называют его размерами или измерениями.

Задачи. 87. Показать у бруса какое-нибудь ребро и те грани, которые по нему пересекаются.

88. Указать какой-нибудь предмет, имеющий форму прямоугольного бруса с весьма малой высотой! с малым основанием и большой высотой!

89. Показать на линейке с квадратным основанием параллельные ребра. Почему при линовании ею бумаги получаются прямые линии? и кроме того параллельные, одинаково удаленные друг от друга прямые?

90. Показать у бруса равные между собою ребра!

Показать у прямоугольного бруса какое-нибудь ребро все перпендикулярные к нему ребра! все параллельные ему ребра

91. Взять прямоугольный брус так, чтобы четыре его ребра были горизонтальны и ни одно ребро не было отвесно!

92. Показать три измерения (длину, ширину и высоту) класса

93. Длина, ширина и высота прямоугольного бруса 5 4 и 3 дюйма. Чему равны длина и ширина передней грани боковой грани! верхнего основания!

Вершины бруса. Ребра AD, CD и HD (черт. 56) сходятся в одной точке D. Эти ребра имеют общую точку которая называется вершиной бруса. Прямоугольный брус имеет восемь вершин.

Задача 94. Показать у прямоугольного бруса вершину и те ребра, которые в ней пересекаются! те грани, которые в ней пересекаются!

Сравнение прямоугольного бруса (параллелепипеда) и куба. Сравнивая прямоугольный брус и куб, посмотрим, чем они похожи друг на друга.

Сходство:

У куба—	У прямоуг. бруса—
Шесть граней.	Шесть граней.
Двенадцать ребер.	Двенадцать ребер.
Восемь вершин.	Восемь вершин.
Углы прямые.	Углы прямые.
Противоположные грани равны.	Противоположные грани равны.
Противоположные грани параллельны.	Противоположные грани параллельны.

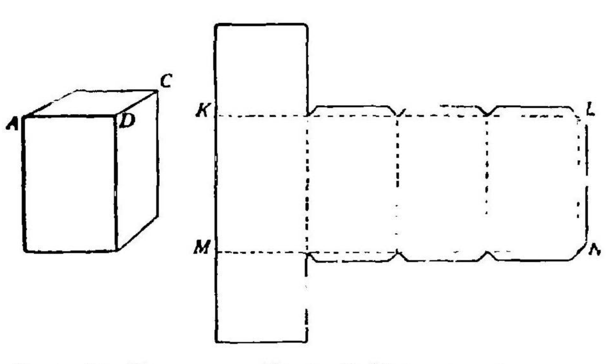
Посмотрим теперь, чем различаются прямоугольный брус и куб.

Различие:

У куба—	У прямоуг. бруса
Все грани—квадраты.	Гранями могут быть прямоугольники и квадраты.

Приготовление прямоугольного бруса. Пред нами прямоугольный брус с квадратным основанием $ABCD$ (черт. 58). Стороны этого основания AB, BC, CD и DA равны; поэтому боковые грани бруса суть равные между собою прямоугольники

Развертку поверхности этого бруса можно представить в виде фигуры, изображенной на черт. 59. Сделаем из плотной бумаги развертку прямоугольного бруса, размеры которого 5 см., 5 см. и 8 см. Для этого проведем две параллельные прямые KL и MN на расстоянии 8 см. друг от друга Проведем прямую KM, перпендикулярную к одной из них; она будет перпендикулярна и к другой. Начиная от точек K и M, отложим на каждой из этих прямых по четыре отрезка в 5 см. каждый. Построим боковые прямоугольники, а затем и квадраты. Сделав острым предметом царапины в местах изгибов и оставив «запасы» для склеивания, вырежем развертку, а затем склеим брус столярным клеем.



Черт. 58. Прямоугольный брус (параллелепипед).

Черт. 59. Развертка поверхности прямоугольного бруса.

Задачи. 95. Начертить разнообразные развертки прямоугольного бруса, измерения которого 3 см., 2 см., 4 см.

96. Начертить развертку кубического ящика и его крышки. Ребро ящика 4 см. При черчении развертки крышки принять во внимание толщину в 1 мм. папки, из которой будет изготовлен ящик.

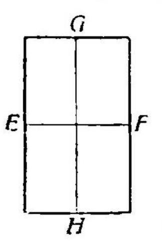
15. Деление прямоугольника.

Деление средней линией. Вырезав из бумаги прямоугольник, перегнем его так, чтобы две противоположные его стороны совпали. Линия изгиба EF (черт. 60) делит две другие стороны прямоугольника и самый прямоугольник пополам. Эта линия называется средней линией. Так мы найдем и другую среднюю линию GH. Две средние линии делят прямоугольник на четыре равных прямоугольника.

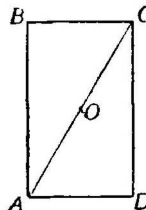
Деление диагональю. Соединив две противоположные вершины прямоугольника A и C, получим его

диагональ AC (черт. 61). В прямоугольнике — две диагонали AC и BD (черт. 62).

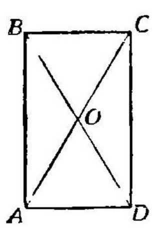
Перегнув прямоугольник $ABCD$ (черт. 61) по диагонали AC, мы увидим, что части его ABC и ADC не совмещаются. Разрежем тот же прямоугольник $ABCD$ по диагонали: он разделится на два треугольника ABC и ADC. Убедимся, что эти треугольники равны. Для этого наложим один треугольник на другой. Чтобы сделать это кратчайшим путем, закрепим треугольник ADC, а треугольник ABC повернем вокруг точки O на пол оборота, сохраняя его все время на той же плоскости. Тогда треугольники совпадут. Итак, диагональ делит прямоугольник на два равных треугольника.



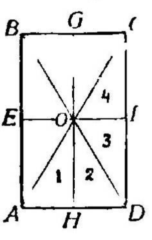
Черт. 60. Прямоугольник, разделенный двумя средними линиями.



Черт. 61. Прямоугольник, разделенный диагональю.



Черт. 62. Прямоугольник, разделенный двумя диагоналями.



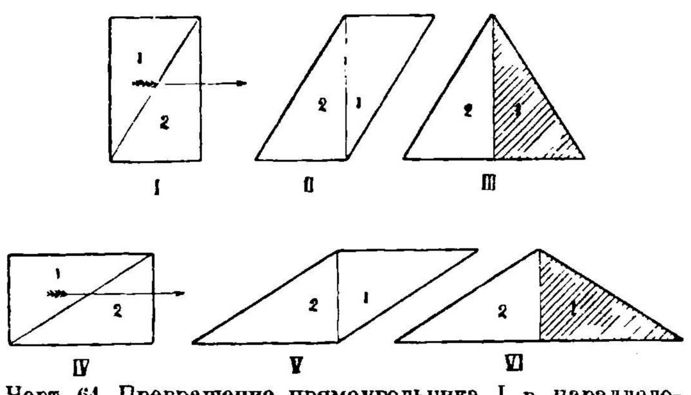
Черт. 63. Прямоугольник, раздел. диагоналями и средними линиями.

Деление двумя диагоналями. Разрежем прямоугольник $ABCD$ по диагоналям (черт. 62). Получим четыре треугольника. Сравним противоположные треугольники AOD и BOC Для этого повернем треугольник AOD вокруг точки O на пол-оборота: треугольники совместятся. Таким образом, противоположные треугольники AOD и BOC, а также AOB и DOC равны.

Деление диагоналями и средними линиями. Два смежных треугольника AOD и DOC (черт. 62) при наложении не совмещаются: они — неравны. Сравним их иначе. Если провести в прямоугольнике $ABCD$ средние линии (черт 63), то треугольник AOD и DOC разделятся каждый на два треугольника, которые отметим цифрами 1, 2, 3, и 4. Вырезав треугольники AOD и DOC и согнув их по OF и OH мы легко убедимся, что все четыре треугольника 1, 2, 3 и 4-й равны. Отсюда видим, что треугольники AOD и DOC не равны, но каждый из них состоит из

двух частей: первый—из частей 1 и 2, второй—из частей 3 и 4. И части 1 и 2-ая первого треугольника равны частям 3 и 4-ой второго треугольника. Поэтому треугольники *AOD* и *DOC* называются **равносоставными**, т.-е. состоящими из соответственно равных частей.

Преобразование прямоугольника. Вырезав прямоугольник I (черт. 64) из бумаги, разрежем его по диаго-

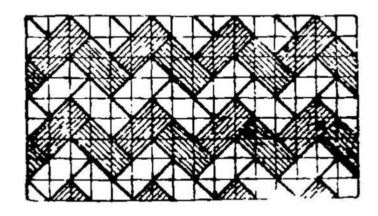


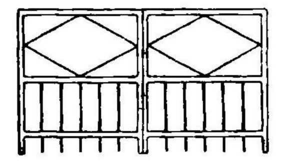
Черт. 64. Превращение прямоугольника I в параллелограмм II, в треугольник III, в параллелограмм V и в треугольник VI.

нали. Будем превращать его в новые фигуры—в паралеллограмм и в треугольник. Паралеллограмм II получим, заставляя скользить вправо треугольник 1 по плоскости, на которой он лежит. Треугольник III получим из параллелограмма II, повернув треугольник 1 на изнанку. Положив прямоугольник длинной стороной к себе и поступая, как раньше, мы получим из него паралеллограмм V и треугольник VI.

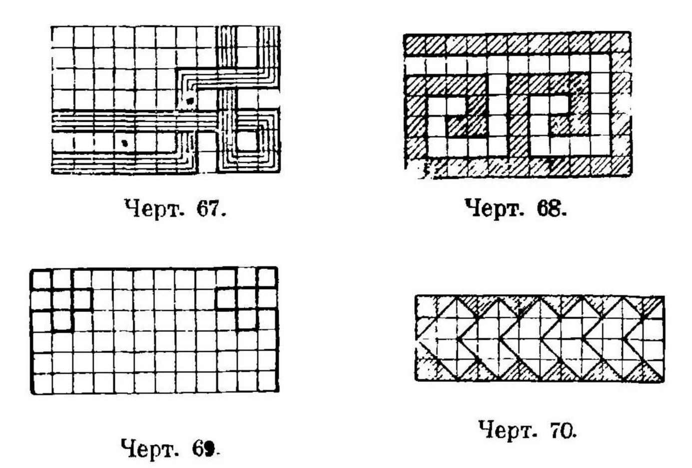
16 Орнаменты.

На чертеже 65 изображен паркет., на чертеже 66—


Черт. 65


Черт. 66.

ворота. Прочие 4 орнамента представляют собой части украшений для рамок и обложек.

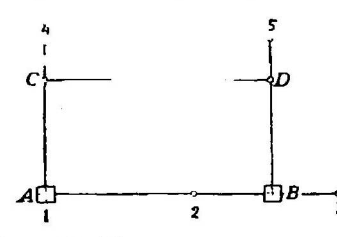


Черт. 67. Черт. 68.

Черт. 69. Черт. 70.

17. Построение прямоугольника на местности.

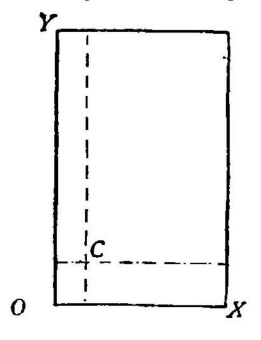
Построим на открытой местности прямоугольник, стороны которого равны 30 саж. и 20 саж. Для этого отметим тремя вехами 1, 2 и 3 прямую линию (черт. 71) и на ней отмерим с помощью мерной веревки отрезок *AB*, равный 30 саж. В точке *A* поставим эккер так, чтобы две его булавки были расположены вдоль прямой *AB*, и по другим двум булавкам отметим вехой прямую *A*4, перпендикулярную к прямой *AB*. Подобным же образом отметим прямую *B*5, перпендикулярную к прямой *AB*. Отложим на прямых *A*4 и *B*5 отрезки *AC* и *BD*, равные 20 саж. Проверим затем, насколько разнится расстояние *DC* от 30 саж. Прямоугольник *ACDB* равен ¼ десятины. Если бы к полученному на местности прямоугольнику *ACDB* присоединили еще таких 3 прямоугольника, то получили бы участок в одну десятину земли.



Черт. 71. Построение прямоугольника на местности.

18. План.

Определение положения точки на плоскости. Положив пред собой бумажный прямоугольник (черт. 72), отметим на нем нижнюю сторону буквами OX и левую боковую буквами OY. Требуется найти на нем точку C, которая находится на расстоянии 3 см. от нижней стороны OX прямоугольника и на расстоянии 2 см. от левой стороны OY. Для этого проведем на нем прямую, параллельную стороне OX, на расстоянии 3 см. от нее, и другую прямую на расстоянии 2 см. от стороны OY. Эти две прямые пересекутся в точке C, которая лежит на расстоянии 3 см. от стороны OX и на расстоянии 2 см. от стороны OY.



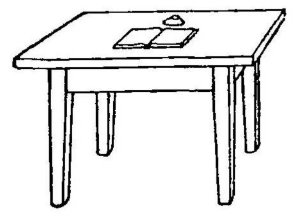
Черт. 72. Определение положения точки C.

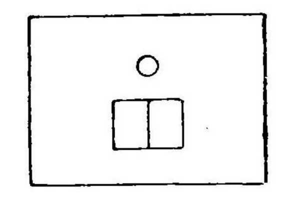
Задачи. 97. Найти в классе на полу такую точку, которая лежит на расстоянии 2 арш. от северной стены и 1 арш. от западной (прямые линии можно обозначить бечевками).

98. Несколько учеников зарывают во дворе какую-либо вещь и измеряют возможно точнее ее расстояние от двух смежных границ двора. Другая группа учеников, зная эти расстояния, разыскивает вещь.

99. От точки O провести две прямые OX и OY под прямым углом. Найти такую точку, которая лежит на расстояниях от этих прямых 3 см. и 5 см.? 5 см. и 1 см.? 5 см. и 0 см.? 1 см. и 5 см.? 0 см. и 5 см.? 0 см. и 0 см.?

План и рисунок. На столе стоит чернильница и лежит книга. Этот стол вместе с предметами, находящимися на нем, можно нарисовать так, как он нам представляется. Мы будем иметь рисунок стола (рис. 73).


Черт. 73. Рисунок стола.


Черт. 74. План стола.

Иногда бывает нужно обозначить только места, которые занимают предметы, напр., стол и лежащие на нем предметы—

книга и чернильница. Тогда мы будем иметь план стола (черт. 74).

Задача 100. Начертить на доске план классного стола и предметов, положенных на него, сохраняя на плане настоящие их размеры и расположение. Сделать для этого нужные измерения.

План в уменьшенном масштабе. 1. Начертим план классной доски на бумаге. Изображение доски нужно сделать, конечно, уменьшенным. Пусть стороны классной доски $2\frac{1}{4}$ арш. и $1\frac{1}{2}$ арш. При черчении будем принимать 1 верш. за 1 аршин. Тогда план доски представится в виде прямоугольника, у которого стороны равны $2\frac{1}{4}$ верш и $1\frac{1}{2}$ верш.

Задача 101. Начертить план классного окна, приняв вершок за аршин.

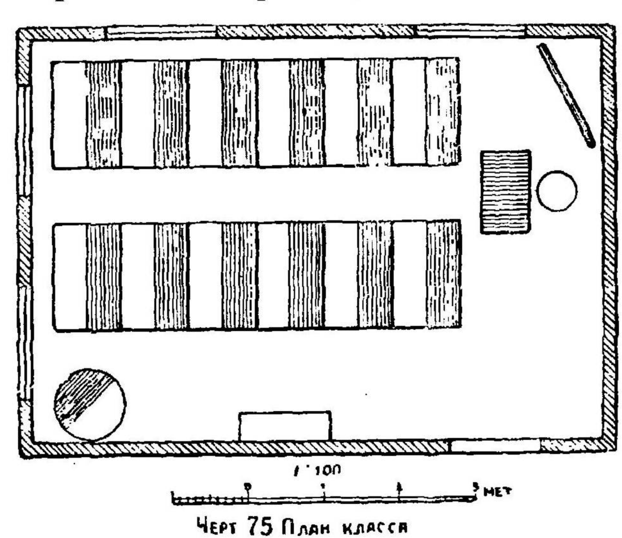
2. Сделаем план класса и некоторых наиболее крупных предметов, находящихся в нем.

Начертим сперва от руки набросок плана класса и тех предметов, которые мы желаем изобразить. На этом же наброске мы будем отмечать в соответствующих местах полученные при измерении числа. Измеряем: длину и ширину класса, ряда ученических столов, учительского стола, шкафа, печки, ширину окна и дверей, расстояния между ними и проч. Чтобы правильно изобразить положение учительского стола в классе, измеряем расстояние от какой-либо его ножки до двух смежных стен класса. Так же точно находим место и для ряда ученических парт.

После этих измерений наносим план на бумагу! План этот можно сделать больше и меньше. Допустим, что длина класса равна 7,5 м. (7 м. 5 дм.), а ширина 5,4 м. (5 м. 4 дм.), и план его должен поместиться на четвертушке бумаги. Какой мерой нам обозначить один метр при черчении плана? Если бы мы вместо каждого метра стали брать сантиметр, то длина и ширина класса оказалась бы 7,5 см. и 5,4 см.; план получился бы слишком мал. Приняв 2 см. за метр, мы получим длину класса на плане 15 см.; а если бы мы длину метра обозначили отрезком в 3 см., то план на четвертушке уже

не поместился бы На плане класса, изображенном на черт. 75, каждый метр обозначен сантиметром.

Делая план класса, мы все линии в нем должны уменьшить. Чтобы при этом не производить вычислений, вырежем узкую бумажную полоску и на ней отметим деления по 1 см. в каждом; каждое деление будет обозначать 1 м. Одно из них разделим на 10 равных частей (чер. 75): это — десятые доли метра. С помощью такой полоски мы и будем откладывать, при черчении плана, линии данной длины. Она называется **уменьшенным масштабом** и изображена внизу на черт. 75.



Черт 75 План класса

Задачи. 102. Указав какой-либо предмет в классе, разыскать его изображение на сделанном вами плане и обратно, указав какой-либо предмет на плане, разыскать его в комнате.

103. С помощью масштаба измерить расстояние от учительского кресла до какого-либо окна по плану. Сделать измерение того же расстояния в самом классе. Сравнить результаты.

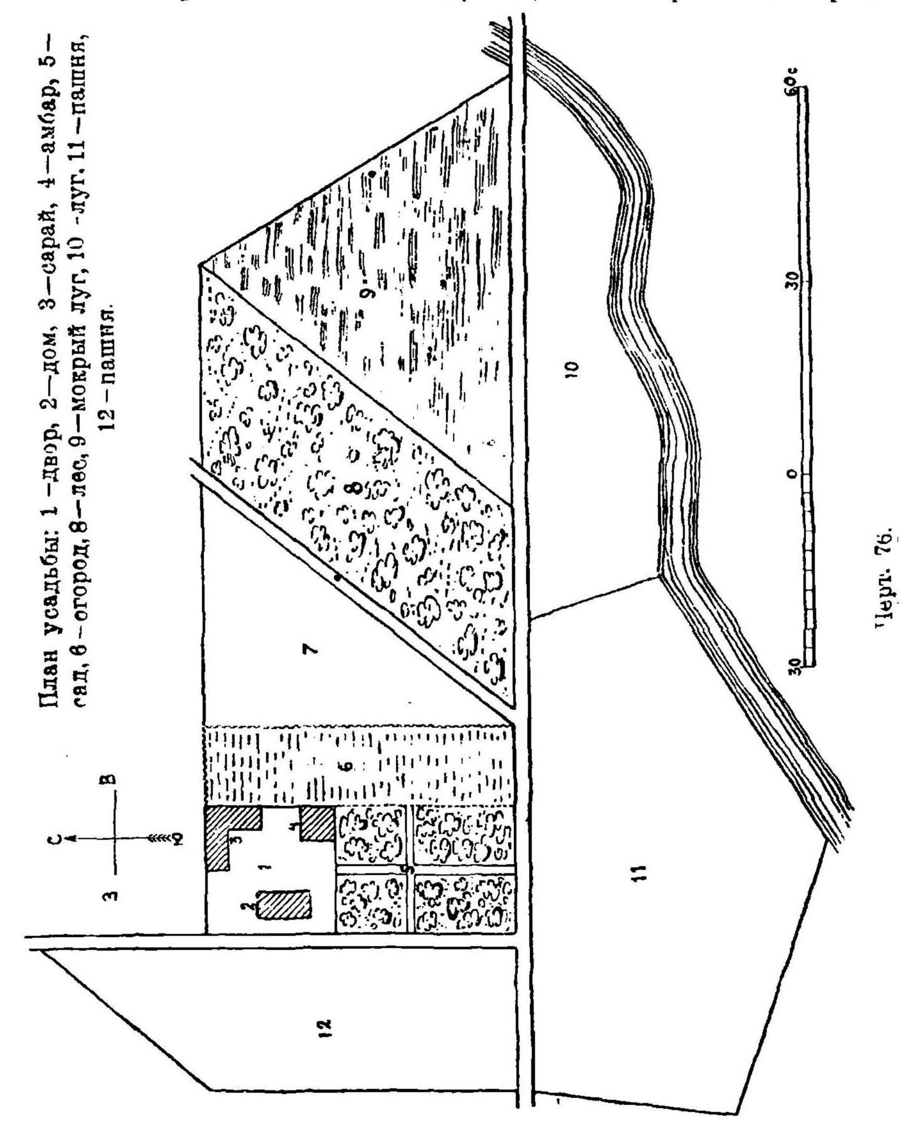
104. Измерить на плане класса (черт. 75), пользуясь масштабом, изображенным на том же чертеже, различные расстояния: длину и ширину класса, ширину окон, длину прохода между ученическими партами и т. д. Измерение удобнее всего делать, перенося с помощью циркуля расстояния с плана на масштаб.

105. Узнать длину диагонали квадрата, сторона котораго равна 1 м. Для этого начертить квадрат, приняв десиметр за метр.

106. Стороны прямоугольного поля 30 саж. и 40 саж. По его диагонали идет дорога. Начертить план поля и дороги, принимая одну линию за одну сажень, и измерить по плану длину дороги.

107. Начертить план прямоугольного сада со сторонами 180 м. и 100 м., в котором по средним линиям идут дороги в 2 м. шириной, принимая 1 мм. за 1 м.

3. На плане класса (черт. 75) один сантиметр принят за метр. Один сантиметр короче метра в 100 раз.



Черт. 76.

Поэтому всякое расстояние на плане меньше действительного расстояния в классе в 100 раз. Можно ту же

мысль выразить иначе: расстояние между двумя точками на плане составляет $^1/_{100}$ часть действительного расстояния. Напр., длина доски на плане составляет $^1/_{100}$ часть настоящей длины доски. Дробь $^1/_{100}$, или 1:100, помечается у масштаба (черт. 75).

Задачи. 108 Длина комнаты 15 арш. На плане длина ее составляет $^1/_{80}$ часть настоящей длины. Какова длина комнаты на плане?

109. Ваш путь из дому до школы равен 300 м. Каков он выйдет на плане, если план сделат в масштабе 1:10 000? 1:3 000? 1:2 500?

110. Длина окна на плане 3 см. Эта длина составляет $^1/_{50}$ часть действительной длины его. Найти длину окна.

111. Длина дома на плане равна 1,2 см. Вычислить настоящую длину дома, зная, что план сделан в масштабе 1:1000? 1:1500?

112. Измерьте длину и ширину сада на плане (черт. 76, 5) и затем вычислите действительную длину и ширину, зная, что план сделан в масштабе 1:2520.

113. По плану (черт. 76) измерить длину и ширину двора 1; сада 5; расстояние от дома 2 до реки по дороге!

114. На плане изображена дорога. Какую часть настоящей длины дороги составляет длина ее на плане, если известно, что на плане принят дюйм вместо фута! дюйм вместо сажени! вершок вместо сажени! дюйм вместо 3 верст! дюйм вместо 100 верст! сантиметр вместо 100 метров!

115. План сделан в масштабе $^1/_{84}$; сколько дюймов взято вместо сажени? План сделан в масштабе 1:48; сколько вершков принято за сажень? Карта сделана в масштабе 1:100 000; сколько километров обозначает на карте 1 см.? Карта начерчена в масштабе $^1/_{126000}$. Сколько верст надо считать в дюйме?

116. По карте нашего уезда измерить расстояния между разными известными нам деревнями.

117. Пользуясь масштабом карты России, узнать расстояния между известными нам городами.

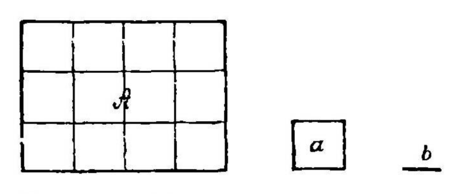
19. Площадь прямоугольника.

Измерение площади прямоугольника. 1. На чертеже 77 изображен план прямоугольного участка земли *A*. Длина его 4 саж., ширина 3 саж. Надо узнать, сколько потребуется картофеля, чтобы засадить этот участок.

Начертим на полу мелом квадрат, сторона которого равна 1 саж. Этот квадрат может быть назван квадрат-

ной саженью. На таком квадрате земли сажают около 3 фунт. картофеля.

Чтобы решить эту задачу, надо узнать, сколько кв. сажен заключается в данном прямоугольнике. Пусть отрезок *b* обозначает одну сажень. Вырежем из бумаги квадратик *a*, сторону которого будем принимать за сажень, а сам квадратик за кв. сажень. Будем накладывать кв. сажень на прямоугольник, обводя каждый раз ее карандашом. Тогда прямоугольник раз делится на кв. клеточки, на кв. сажени. Посчитаем их.



Черт. 77. Прямоугольный участок земли: *A*—заключает 12 кв. саж.; *a*—уменьш. изображение кв. сажени; *b*—уменьш. изображение линейной сажени.

В ряду — четыре квадратных сажени; они образуют полосу, длина которой 4 саж., а ширина 1 саж. Таких полос в прямоугольнике 3. Поэтому в прямоугольнике 12 кв. саж:

$$4 \text{ кв. саж.} \times 3 = 12 \text{ кв. саж.}$$

Можно сосчитать число кв. сажен и иначе. В поперечной полосе 3 кв. саж. Таких полос 4. Поэтому

$$3 \text{ кв. саж.} \times 4 = 12 \text{ кв. саж.}$$

Оба способа вычисления отличаются только местами сомножителей: 4×3 и 3×4. Чтобы узнать, сколько картофеля потребуется для засева данного участка земли, надо 3 фун. взять 12 раз, получим 36 фунтов.

2. Вместо того, чтобы откладывать кв. сажень на поверхности прямоугольника, можно прямоугольник разлиновать на кв. сажени. Для этого, разделив стороны прямоугольника на сажени, соединим точки деления, как показано на черт. 77.

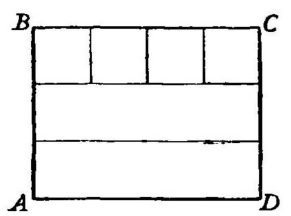
На поверхности прямоугольника помещается 12 кв. сажен. Иначе говорят: площадь прямоугольника равна 12 кв. саженям.

Задачи 118. Надо выкрасить полы класса и коридора. Первый имеет в длинну 4 саж. и в ширину 3 саж., второй 6 саж. и 2 саж. На какой из них пойдет больше краски?

119. Начертить план того и другого пола и разделить их на кв. сажени.

120. Двор имеет вид прямоугольника, стороны которого 10 саж и 4 саж. Начертить его в масштабе 1:420, т.-е. приняв 2 линии за 1 сажень. Разделить его на кв. сажени и сосчитать их.

3. Узнавая площадь прямоугольника, длина которого равна 4 саж. а ширина 3 саж., можно его расчертить и иначе. Ширина его равна 3 саж. Разделим его на 3 полосы: смотрите на чертеже 78. Каждая полоса будет иметь в длину 4 саж. и в ширину 1 саж. Такую полосу можно разделить на 4 кв. саж. Чтобы узнать, сколько кв. саж. заключается в прямоугольнике, надо 4 кв. саж. умножить на 3.



Черт. 78. Прямоугольник—длиной 4 см., шириной 3 см. Площадь 12 кв. см.: 4 кв. см. × 3 = 12 кв. см.

Задачи. 121. Начертите прямоугольник шириной в 1 см., а длиной в 5 см.! 10 см.! Разделите этот прямоугольник на кв. сантиметры. Какова площадь каждого прямоугольника?

122. Представьте себе длинный прямоугольник, ширина которого равна 1 см., а длина 100 см. Какова его площадь?

123. Представьте себе дорогу шириной в 1 саж., длиной в 1000 саж. Какова ее площадь?

124. Начертите прямоугольник со сторонами 8 см. и 6 см. Разделив его на полосы, каждая шириной в 1 см., вычислить затем его площадь.

125. Вообразите себе прямоугольник длиной в 7 саж. и шириной в 4 саж., который разделен на полосы, шириной в 1 саж. каждая. Сколько кв. сажен он заключает?

Русские квадратные меры. 1. Начертим мелом на полу квадрат, сторона которого равна 1 саж. Такой квадрат называется кв. саженью. Рядом с ним начертим квадрат, сторона которого равна 1 арш., или кв. аршин. Разделив квадратную сажень на кв. аршины, увидим, что в одной кв. сажени заключается 9 кв. аршин.

Задачи. 126. Сторона квадрата равна 2 саж. 2 арш. Вычислить его площадь в кв. аршинах! в кв. саженях!

127. Нива имеет вид прямоугольника, стороны которого равны 95 саж. и 48 саж. Если десятина земли стоила раньше 600 руб., сколько стоила вся нива? Десятина = 2400 кв. саж.

128. Огород прямоугольной формы, длиной 10 саж. 1 арш., шириной 9 саж., засажен картофелем. Сколько картофеля потребовалось на посадку, если на квадратную сажень идет его 3 фунт.?

2. Квадрат, сторона которого равна 1 футу, называется квадратным футом.

Задачи. 129. Начертить кв. фут.

130. Сколько в квадратной сажени кв. футов?

131. Квадрат имеет сторону 2 саж. 1 фут. Вычислить его площадь в кв. футах! в кв. саженях!

132. Вычислить площадь прямоугольника, стороны которого 3 саж. 4 фут. и 2 саж. 1 фут., в кв. футах! в кв. саженях

133. Огород заключает 49 гряд. Каждая гряда имеет в длину 7 саж. 1 фут и в ширину 4 фута. Вычислить общую площадь всех гряд!

3. Квадратная сажень, кв. фут, кв. аршин называются мерами площади, или квадратными мерами, или еще чаще единицами площади и квадратными единицами.

Мы раньше уже вычислили, сколько кв. аршин в одной кв. сажени, и делали это так:

$$3 \times 3 = 9 \text{ (кв. арш.)},$$

или

$$3^2 = 9 \text{ (кв. арш.)}$$

Итак, одна линейная сажень заключает три аршина, а одна квадратная сажень заключает трижды-три квадратных аршина.

Чтобы узнать, сколько кв. футов в кв. сажени, надо 7 кв. фут. умножить на 7:

$$7 \times 7 = 49 \text{ (кв. фут.)}$$

или

$$7^2 = 49 \text{ (кв. фут.)}.$$

Итак, одна линейная сажень имеет семь футов, а одна квадратная сажень имеет семью-семь кв. футов.

Кроме этих квадратных единиц, существуют еще другие:

1 арш.	= 16 вер.,	а 1 кв. арш.	= 16^2	=	256 кв. вершк.
1 фут	= 12 дюйм.,	а 1 кв. фут	= 12^2	=	144 кв. дюйма.
1 дюйм	= 10 лин.,	а 1 кв. дюйм	= 10_2	=	100 кв. лин.
1 верст.	= 500 саж.,	а 1 кв. верста	= 500^2	=	250000 кв. саж.

Мера для измерения поверхности земли:

1 десятина=2400 кв. саж.

Зачем существуют различные квадратные единицы? Отчего бы не удовольствоваться одной какой-нибудь мерой?

Это сделается ясным, если вы решите такие задачи.

Прямоугольный пол комнаты имеет длину и ширину 3 саж. 3 фут. и 2 саж. 1 фут. Сколько в нем квадратных линий? Удобно ли для измерения поверхности пола пользоваться квадратной линией?

Еще задача: Почтовая марка имеет 8 линий в длину и 6 линий в ширину. Какова ее площадь в кв. линиях? А какова ее площадь в кв. саженях, иначе говоря, какую часть квадратной сажени занимает поверхность марки?

Метрические меры площади:

1 кв. метр	$= 10^2 =$	100	кв. дм.
1 кв. дм.	$= 10^2 =$	100	кв. см.
1 кв. см.	$= 10^2 =$	100	кв. мм.
1 кв. метр	$= 1000^2 =$	1 000 000	кв. мм.

Отсюда видно, что метр больше десиметра, десиметр больше сантиметра, сантиметр больше миллиметра в 10 раз, а кв. метр больше кв. десиметра, кв. десиметр больше кв. сантиметра, кв. сантиметр больше кв. миллиметра в 100 раз.

Задача 134. Сколько кв. миллиметров в кв. метре?

Меры.для измерения поверхности земли следующие:

Ар—квадрат, сторона которого равна 10 метрам. Его площадь равна 100 кв. м.

Гектар есть квадрат, сторона которого равна 100 м. Его площадь в кв. метрах равна 10 000 кв. метрам. Гектар занимает 100 аров.

Ар имеет около 22 кв. саж., и гектар—около 2200 кв. саж. (точнее 2197 кв. саж.).

Задачи. 135. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 3 см. 5 мм.!

136. Какова сторона квадрата, имеющего 9 ар? 4 гектара?

137. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 35 см., в кв. сантиметрах! в кв. десиметрах!

138. Вычислить площадь квадрата, сторона которого равна 73 мм., в квадратных сантиметрах! в кв. десиметрах! Записать ответ десятичной дробью.

139. Как записать десятичной дробью число 3 кв. м. 25 кв. дм.? 5 кв. см. 5 кв. мм.?

140. Превратить 315 кв. см. в кв. метры и полученное число записать, как десятичную дробь! То же сделать, превратив число 284 кв. см. в. кв. дм.! 320 кв. мм. в кв. см.!

Русские и метрические квадратные меры. 1. Сколько квадратных аршин заключает квадратный метр?

В одном аршине 71 см. В одном кв. аршине 5041 кв. см., ибо

$71 \times 71 = 5041.$
1 кв. арш. = 5041 кв. см.
1 кв. метр = 10000 кв. см.

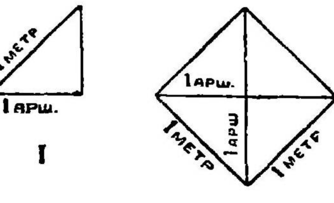
Отсюда видно, что кв. метр почти вдвое больше кв. аршина. Следовательно,

1 кв. м. = 2 кв. арш.
1 кв. арш. = $1/2$ кв. метра.

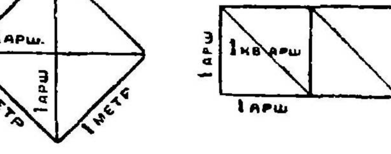
Тот же результат можно получить и иначе. Если построить треугольник I (черт. 79), в котором две стороны заключают прямой угол, и равны каждая аршину, то третья сторона будет равна 1 метру.

Сделаем 4 таких треугольника.

Из них можно составить кв. метр (черт. 79, II). Но из тех же треугольников можно составить и 2 кв. аршина (черт. 80).



Черт. 79. I—половина кв. аршина; II—квадратный метр.



Черт. 80. Два кв. аршина, составленных из одного кв. метра.

Задача 141. Сколько кв. метров в одной кв. сажени

2. Сколько кв. сантиметров в кв. дюйме?

Прямая линия в 2 дюйма имеет 5 сантиметров. Начертим квадрат, сторона которого равна 2 дюймам. Его площадь равна 4 кв. дюймам или 25 кв. см. Значит 1 кв. дюйм имеет почти 6 кв. см. (приблизительно).

Задача 142. Зная, что в двух вершках укладывается 9 см., вычислить сколько кв. сантиметров содержит 1 кв. вершок (в круглых десятках).

Площадь прямоугольника (правило). Сторона *AD* прямоугольника, изображенного на чертеже 78, (стр. 55) называется основанием прямоугольника, а боковая его сторона *AB* служит его высотой. Чтобы вычислить площадь прямоугольника, мы измеряем его высоту и тем узнаем, на сколько полос он может быть разделен. Высота прямоугольника *ABCD* (черт. 78) 3 см. Далее, измеряем основание прямоугольника и тем находим площадь одной полосы. Длина нашего прямоугольника 4 см. Значит, площадь полосы 4 кв. см. Наконец, полученые числа перемножаем:

$$4 \times 3 = 12 \text{ (кв. см.)}.$$

Следовательно, чтобы узнать площадь прямоугольника надо измерить его основание и высоту и полученные числа перемножить. Короче говоря:

Чтобы узнать площадь прямоугольника, надо умножить его основание на высоту.

Задачи. 143. Вычислить площадь прямоульника, основание и высота которого:

5 × 3 (м.)!
12 × 18 (см!
3 см. 2 мм. × 1 см. 5 мм.!
3 саж. 4 фт. × 2 саж. 1 фт!

Замечание: Слова „основание 5 м., а высота 3 м.“ записывают часто так:

5 м. × 3 м., или 5 × 3 (м.).

144. Измерить площадь всей поверхности кирпича.

145. Вычислить площадь полной поверхности прямоугольного столба, длина, ширина и высота которого 5 см. 5 мм., 3 см. 8 мм. и 2 см.! Записать ответ десятичной дробью.

146. Оценить на глаз площадь полулиста бумаги! площадь классной доски! проверить предположенные числа измерением!

147. Сколько стоит выкрасить двухскатную крышу, каждый скат которой представляет прямоугольник со сторонами 12 арш. и 35 арш., если окраска 1 кв. арш. обходилась бы по 30 коп.?

148. Сколько зерна высеяно на ниву, имеющую вид прямоугольника, стороны которого равны 75 саж. и 24 саж., если на обсеменение десятины идет 10 пуд. зерна? Десятина имеет 2400 кв. саж.

149. План комнаты имеет форму прямоугольника и сделан в масштабе 1:168. Основание и высота плана 23 линии и 17 линий. Вычислить площадь пола.

150. Сад имеет вид прямоугольника, длина и ширина которого 120 м. и 80 м. По средним линиям этого прямоугольника идут дорожки шириной в 2 м. Вычислить площадь дорожек и площадь прочей земли сада.

151. Надо окрасить пол, дверь и окна комнаты, а стены и потолок побелить. Длина, ширина и высота комнаты 4 саж., 2 саж. 2 арш., 1 саж. 2 арш. В комнате 3 окна, длина и ширина каждого 2 арш. и $1^1/_2$ арш., и одна дверь—шириною в 2 арш. и высотой 3 арш. Во сколько обойдется окраска и побелка комнаты по существующим теперь ценам?

152. Пол в сенях надо выстлать кирпичом. Длина сеней 2 саж. 1 арш., ширина 1 саж. 2 арш. Длина и ширина кирпича 6 верш. и 3 верш. Сколько потребуется кирпичей?

153. Узнать площадь двора, сада, огорода, изображенных на плане (черт. 76, стр. 52).

154. Требуется сделать пол, размеры которого 3 саж 1 арш. и 2 саж. 2 арш. Сколько штук досок и гвоздей потребуется на этот пол, если на 1 кв. сажень пола идет досок 11 линейных сажен и 33 гвоздя? Длина доски 3 саж. Ответ получить приблизительный, в целых числах.

155. Стена имеет 5 саж. длины и 2 саж. ширины. Сколько потребуется для нее кирпичей, известкового раствора и дней работы, если на 1 кв саж. стены (в $2^1/_2$ кирпича толщиною) идет 1025 кирпичей, 0,1 куб. саж. раствора и при одном каменщике $2^1/_2$ дня работы?

156. Паркет состоит из квадратных шашек (дощечек), которые прибиты к квадратным щитам. Сторона щита 2 арш., сторона шашки—8 вершк. Сколько щитов потребуется, чтобы выстлать пол длиной в 10 арш. и шириной в 8 арш., и шашек, чтобы покрыть щит?

Задача о наибольшей площади и наименьшем периметре прямоугольника. 1. Птичий дворик, имеющий вид прямоугольника,

надо огородить проволочной сеткой, которой имеется 20 метров. Спрашивается, какую длину сторон прямоугольника надо взять, чтобы площадь его была наибольшая.

Все четыре стороны дворика, или его периметр, должны составить вместе 20 метров. Если согласимся избегать дробных чисел, то стороны дворика, его периметр и площадь могут быть:

Периметр.	Площадь.
1 м. + 1 м. + 9 м. + 9 м. = 20 м.	1 × 9 = 9 (кв. м.)
2 м. + 2 м. + 8 м. + 8 м. = 20 „	2 × 8 = 16 „
3 м. + 3 м. + 7 м. + 7 м. = 20 „	3 × 7 = 21 „
4 м. + 4 м. + 6 м. + 6 м. = 20 „	4 × 6 = 24 „
5 м. + 5 м. + 5 м. + 5 м. = 20 „	5 × 5 = 25 „
6 м. + 6 м. + 4 м. + 4 м. = 20 „	6 × 4 = 24 „
7 м. + 7 м. + 3 м. + 3 м. = 20 „	7 × 3 = 21 „
8 м. + 8 м. + 2 м. + 2 м. = 20 „	8 × 2 = 16 „
9 м. + 9 м. + 1 м. + 1 м. = 20 „	9 × 1 = 9 „

Отсюда видно, что из всех прямоугольных четыреугольников, которые имеют один и тот же **периметр**, наибольшая площадь будет у квадрата.

2. Надо сделать прямоугольный птичий дворик, площадь которого равнялась бы 36 кв. м. Какую форму надо ему дать, чтобы потребовалось наименьше изгороди, т.-е. чтобы периметр был наименьший? Стороны, периметр и площадь у дворика могут быть:

Площадь.	Периметр.
1 × 36 = 36 (кв. м.)	1 м. + 1 м. + 36 м. + 36 м. = 74 м
2 × 18 = 36 „	2 м. + 2 м. + 18 м. + 18 м. = 40 „
3 × 12 = 36 „	3 м. + 3 м. + 12 м. + 12 м. = 30 „
4 × 9 = 36 „	4 м. + 4 м. + 9 м. + 9 м. = 26 „
6 × 6 = 36 „	6 м. + 6 м. + 6 м. + 6 м. = 24 „
9 × 4 = 36 „	9 м. + 9 м. + 4 м. + 4 м. = 26 „
12 × 3 = 36 „	12 м. + 12 м. + 3 м. + 3 м. = 30 „
18 × 2 = 36 „	18 м. + 18 м. + 2 м. + 2 м. = 40 „
36 × 1 = 36 „	36 м. + 36 м. + 1 м. + 1 м. = 74 „

Отсюда видно, что если сделать квадратный дворик со стороной 6 м., то он будет иметь площадь 36 кв. м. и потребует наименьше изгороди, а именно 24 м.

Измерение отрезков прямой линии и плоских фигур.

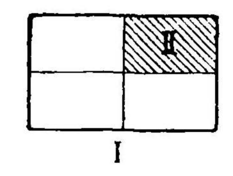
1. Измеряя отрезок прямой линии *BC* (черт. 78), мы откладывали на нем другой отрезок, который назван саженью и всем хорошо известен, и получили, что в отрезке *BC* заключается 4 сажени. Иначе мы говорили так: длина

отрезка *BC* равна 4 саженям. Можно было бы тот же отрезок измерить иным отрезком, хорошо всем известным, напр. отрезком, равным аршину, футу, метру. Значит, длину отрезка мы измеряем, откладывая на нем отрезок, всем хорошо известный.

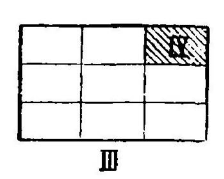
2. Измеряя плоскую поверхность прямоугольника *ABCD* (черт. 78), мы заполняли ее квадратными клетками, которые названы квадратными саженями. Квадратная сажень также часть плоскости, и притом хорошо всем известная. Поверхность прямоугольника заключает 12 кв. саж. Мы выражались иначе: площадь прямоугольника равна 12 кв. саж. Чтобы скорее и удобнее подсчитать квадратные сажени, располагающиеся на плоскости прямоугольника, мы просто умножили длину прямоугольника на его ширину. Таким образом, плоскую поверхность прямоугольника мы измеряли квадратиками, или квадратными единицами, а прямые линии — отрезками прямой или линейными единицами.

20. Сравнение площадей двух прямоугольников.

Начертив прямоугольник (черт. 81), разделим стороны его пополам и точки деления соединим, как показано на чертеже. Прямоугольник разделится на четыре равных прямоугольника. Один из них отмечен цифрой II. Сравним прямоугольники I и II. Стороны прямоугольника II вдвое короче соответственных сторон прямоугольника I. Площадь же прямоугольника II вчетверо, т.-е. в дважды-два раза меньше площади прямоугольника I.



Черт. 81.
Стороны пр-ка II вдвое короче сторон пр-ка I. Площадь пр-ка II в 4 раза меньше площади пр-ка I.



Черт. 82.
Стороны пр-ка IV втрое короче сторон пр-ка III. Площадь пр-ка IV в 9 раз меньше площади пр-ка III.

2. Разделим стороны прямоугольника каждую на 3 равные части (черт. 82) и точки деления соединим, как

показано на чертеже. Прямоугольник III разделится на 9 равных прямоугольников: один из них отмечен цифрой IV. У прямоугольника IV стороны в три раза короче соответственных сторон прямоугольника III, а площадь прямоугольника IV в девять раз, или в трижды-три раза меньше площади прямоугольника III.

3. Если бы стороны одного прямоугольника были в 10 раз короче сторон другого, то площадь первого прямоугольника оказалась бы в 100 или в 10^2 раз меньше площади второго прямоугольника.

Задачи. 157. Площадь прямоугольника равна 250 кв. см., а его стороны в 5 раз длиннее сторон другого прямоугольника. Какова площадь этого второго прямоугольника?

158. Сторона квадратного метра в 10 раз длиннее стороны кв. десиметра. Во сколько раз площадь кв. метра больше площади кв. десиметра?

159. План классной комнаты сделан в масштабе 1 : 112, т.-е. каждая линия на плане в 112 раз короче соответствующей линии в классе. Во сколько раз площадь плана комнаты меньше площади пола?

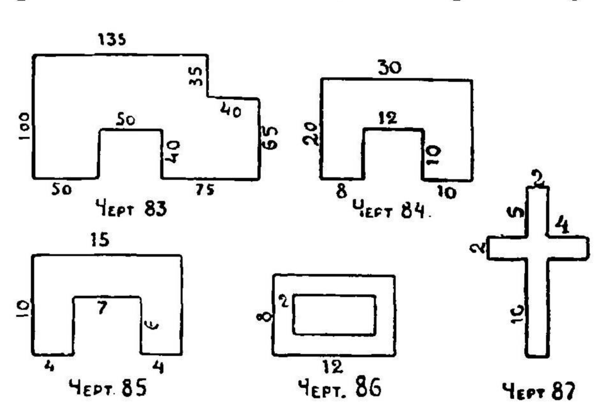
160. Измерив площадь пола на плане (черт. 75, стр. 51), вычислить затем настоящую площадь пола, принимая во внимание, что план сделан в масштабе 1 : 100.

Формы разные—площади равные. 1. Вырежем из бумаги квадрат, сторона которого равна 1 дюйму, а площадь 1 кв. дюйму. Превратим этот квадрат в треугольник, параллелограмм и другие фигуры, как это мы делали раньше (стр. 27—29). Все полученные фигуры будут иметь разные формы, но они будут составлены из одних и тех же частей, будут равносоставные, и потому будут иметь равные площади: площадь каждой фигуры равна 1 кв. дюйму.

2. Вырежем из бумаги три прямоугольника; основание и высота каждого равны 3 см. и 2 см. Два из них преобразуем так, как это делали мы раньше (стр. 47), в треугольник и параллелограмм. Формы всех трех фигур—разные, фигуры равносоставные, и потому площади их равны: площадь каждой равна 6 кв. см.

21. Сложные прямоугольные фигуры.

Съемка плана сложных прямоугольных фигур. Ранее мы сняли план классной комнаты, которая имеет вид прямоугольника, т.-е. фигуры, ограниченной четырьмя сторонами и заключающей 4 прямых угла. На черт. 83 изображен план участка земли, который имеет более четырех сторон. Кроме того, любые две смежные стороны его составляют прямой угол. Такую фигуру будем называть сложной прямоугольной фигурой.



Черт 83 Черт 84 Черт 85 Черт. 86 Черт 87

Очевидно, чтобы снять план участка земли, изображенного на чертеже 83, надо измерить стороны его. Длины сторон в метрах отмечены на чертеже. Масштаб взят здесь 1:5000, т.-е. каждый сантиметр изображает длину 5000 см. или 50 метров.

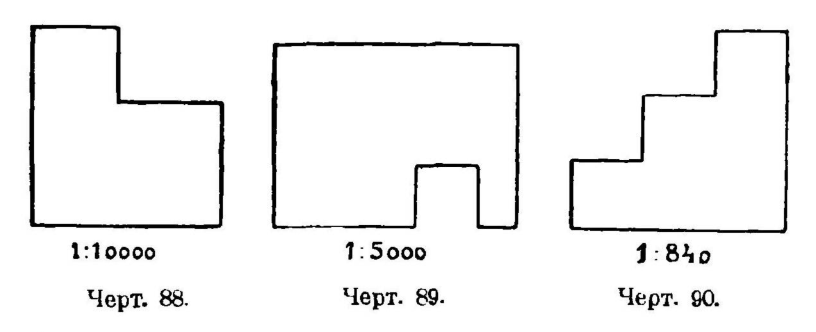
Вычисление площадей сложных прямоугольных фигур. Вычислить площадь сложной прямоугольной фигуры (черт. 84), стороны которой уже измерены, можно двумя способами—путем сложения площадей или путем вычитания их. Можно фиг. 84 разбить на три прямоугольника и, вычислив площадь каждого из них, эти площади сложить. Можно вычислить площади прямоугольников, размеры которых 30 м.$\times$20 м. и 12 м.$\times$10 м. и из первой площади вычесть вторую.

Задачи. 161. Вырезав из бумаги фигуры, показанные на черт. 85, 86 и 87, и соблюдая указанные размеры в сантиметрах, вычислить площади этих фигур.

162. Вычислить площади участков земли, изображенных на чертежах 88, 89 и 90.

163. Лист стекла имеет размеры 32 дюйм. $\times$ 26 дюйм. Можно ли вырезать из него 4 прямоугольных стекла, размеры которых

в дюймах следующие: 16 × 12, 14 × 12, 16 × 15, 15 × 10. Если можно, то как? (Чертеж!). Вычислить площадь остатка.



Черт. 88. Черт. 89. Черт. 90.

164. Лист стекла имеет те же размеры 32 дюйм. × 26 дюйм. Можно ли из него вырезать 4 стекла, размеры которых в дюймах: 15 × 11, 16 × 17, 15 × 12, 20 × 10. Вычислить площадь остатка.

21. Объем прямоугольного бруса (параллелепипеда).

Объем тела. 1. Картофель, овес и другие сыпучие тела измеряются гарнцами, четвериками и литрами, а вес этих тел измеряется фунтами, пудами, килограммами. Молоко, постное масло измеряется стаканами и на вес—фунтами и килограммами.

Отмерим в банку 3 стакана песку и отметим на ней его высоту. Высыпав песок, нальем в ту же банку 3 стакана воды. Поверхность воды будет стоять у той же метки. Отсюда видим, что вода занимает в банке столько же места, сколько и песок. Если бы мы взвесили 3 стакана песку и 3 стакана воды, то песок оказался бы тяжелее воды.

Итак веса песку и воды здесь разные. Между тем и песок, и вода помещаются в 3-х стаканах воды, и потому говорят, что о б ъ е м ы их равны.

Объемы равные—веса разные. 2. Отвесим в банку 2 фун. песку и затем, высыпав песок, нальем 2 фунта воды. Мы заметим, что вода займет в банке больше

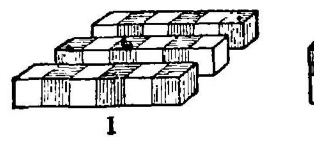
места, чем песок. На этот раз веса песку и воды равны, а объемы их разные.

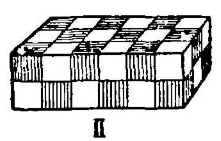
Веса равные—объемы разные. 3. Сделаем из глины папки и дерева прямоугольные брусы (прямоугольные параллелепипеды), каждый длиной 10 см., шириной 8 см. и высотой 6 см. Если бы мы эти три тела положили в какой-нибудь ящик, то глиняный брус в нем занял бы столько же места, как и деревянный и бумажный: объемы их равны, веса же их, конечно, разные.

Как сравниваются объемы брусов? Требуется сравнить объемы двух кирпичных клеток*); каждая из них имеет форму прямоугольного бруса. У одного бруса длина, ширина и высота 6 арш., 3 арш. и 2 арш., у другого 9 арш., 4 арш. и 1 арш.

Составим такие брусы из кубиков, принимая вершок за аршин. Таким образом у первого бруса длина, ширина и высота будут 6 верш., 3 верш. и 2 верш., у второго 9 верш., 4 верш. и 1 верш.

Куб, ребро которого равно 1 вершку, называется кубическим вершком. Составим из кубических вершков первый брус. Длина его 6 вершков; поэтому возьмем 6 куб. вершков и соединим их в брусок. Длина, ширина и высота этого бруска будут 6 вершк., 1 верш. и 1 верш. Ширина целого бруса должна быть 3 вершка; поэтому возьмем всего 3 бруска, длиной в 6 вершков (черт. 91 I). Из них выйдет, если их сдвинуть, слой длиной в 6 верш., шириной в 3 вершка и высотою в 1 верш.





Черт. 91. Брусок составлен из 6 куб. вершк.; слой—из 3 брусков; прямоуг. брус из 2 слоев. Объём его равен 36 куб. вершк.

Так как высота бруса 2 вершка, то возьмем два таких слоя и из них составим брус (черт. 91, II), длина, ширина и высота которого 6 верш., 3 верш. и 2 вершка.

Так же, как мы составили первый брус, составим и второй, длина, ширина и высота которого 9 верш., 4 верш. и 1 вершок.

---

*) Кирпичи складываются в клетки.

Подсчитаем теперь, сколько кубических вершков в одном и в другом брусе. В бруске 6 куб. вершк. Чтобы узнать, сколько их в слое, надо 6 куб. вершк. умножить на 3: получим 18 куб. вершк. Чтобы узнать, сколько кубических вершков в целом брусе, надо 18 куб. вершк. умножить на 2: получим 36 куб. вершков.

Считая так же, найдем, что во втором брусе тоже 36 куб. вершков. Следовательно,и первый, и второй брус заключают по 36 куб. вершков, т.-е. объемы брусов равны.

Итак, при сравнении объемов прямоугольных брусов, меры, которыми мы раньше измеряли длину и площадь, оказались непригодными. Поэтому мы составили оба бруса из равных кубиков и сосчитали, сколько таких кубиков в каждом из них.

Брус, у которого ширина и высота (два измерения) равны единице. Пред нами кубики, кубические вершки. Составим брус, длина которого 6 верш., а ширина и высота по 1 вершку. Объем его равен, как видно, 6 куб. вершкам.

Задачи. 165. Брус имеет длину 100 см., ширину и высоту 1 см. Чему равен его объем?

166. Из 6 кубиков, ребра которых равны 1 вершку, составьте столбик. Чему равны его длина, ширина, высота и объем?

167. Из арифметического ящика вынем брусок. Чему равны его длина, ширина и высота? Чему равен его объем?

168. На заводах выпиливаются брусья с квадратным сечением:

длиной 20 фут., стороны сечения 1 фут.
" 10 арш., " " 1 верш.

Вычислить объем и вес елового бруса, зная, что 1 куб. дюйм весит около $2^{1}/_{2}$ зол.

Брус, у которого высота (одно измерение) равна единице. Составим брус длиной 5 верш., шириной 4 верш. и высотой 1 верш. Вычислим его объем.

Так как длина бруса 5 вершков, то возьмем 5 куб. вершков и из них составим брусок, размеры которого будут 5 верш., 1 верш. и 1 верш. Так как ширина бруса 4 вершка, то таких брусков надо взять 4. Отсюда видно, что объем целого бруса равен 20 куб. вершкам:

5 куб. верш. $\times$ 4 = 20 куб. верш.

Можно было бы брусочки брать длиной по 4 верш., тогда их понадобилось бы 5. При вычислении множимое и множитель поменялись бы местами:

4 куб. верш. × 5 = 20 куб. верш.

Площадь основания этого бруса равна 20 кв. верш.

Задачи 169. Брус имеет длину 6 верш., ширину 5 верш., высоту 1 верш. Вычислить его объем!

170. Сколота для ледника прямоугольная площадка льда размер которой 3 саж. 4 фт. × 2 саж. 2 фт. Толщина льда 1 фут. Сколько весит этот лед, если 1 куб. фут льда весит 1 пуд 24 фн.?

171. Каковы могут быть длина, ширина и высота прямоугольного бруса, у которого объем 49 куб. верш.? 25 куб. см.? 35 куб. вершк.?

172. Каковы могут быть длина и ширина прямоугольного бруса, у которого высота 1 см., а объем 24 куб. см.! 36 куб. см

Брус, у которого длина, ширина и высота равны нескольким единицам. Составим брус длиной 5 вершк., шириной 4 вершка и высотой 3 вершка.

Чтобы составить брусок, можно взять 5 куб. вершков; чтобы составить слой можно взять 4 таких бруска; чтобы составить целый брус надо взять 3 таких слоя.

Чтобы вычислить объем целого бруса, найдем сперва объем слоя. Длина брусочка 5 верш., ширина и высота по 1 вершку; поэтому объем брусочка 5 куб. вершков. Ширина слоя 4 вершка, значит он имеет 4 бруска и так как объем бруска 5 куб. вершков, то объем слоя 20 куб. вершков:

5 куб. верш. × 4 = 20 куб. верш.

Так как высота бруса 3 вершка, то слоев в нем поместится 3; но объем слоя 20 куб. вершков, значит объем целого бруса равен 60 куб. верш.:

20 куб. верш. × 3 = 60 куб. верш.

Решение задачи можно записать в одну строчку:

$5 \times 4 \times 3 = 60$ (куб. верш.).

Мы могли бы составить брус в ином порядке. Напр чтобы составить слой, взять 5 брусочков, по 4 кубика. Тогда решение задачи было бы записано так:

$4 \times 5 \times 3 = 60$ (куб верш)

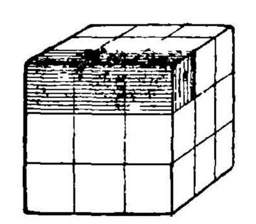
5*

Могли бы составить брус из отвесных слоев, взяв брусочки из 4 кубиков, брусочков в слоях по 3 и таких слоев 5. Тогда вычисление было бы записано:

$$4 \times 3 \times 5 = 60 \text{ (куб. верш.)}.$$

Способы решения нашей задачи, как видно, будут отличаться местами сомножителей, произведение которых будет одно и то же.

Русские меры объема. 1. Куб, ребро которого равно 1 саж., называется кубической саженью Куб, ребро которого равно 1 арш., называется кубическим аршином. Вычислим, сколько в одной кубической сажени кубических аршин. На черт. 92 сделано уменьшенное изображение куб. сажени. Ребро ее, равное одной сажени, разделено на 3 равные части, по 1 арш. в каждой части. Кубическая сажень разделена на три слоя, каждый слой на три брусочка, каждый брусочек на три кубических аршина.



Черт. 92. Уменьшенное изображение кубической сажени, разделенной на куб. аршины.

В слое 9 куб. арш.:

$$3 \times 3 = 9 \text{ (куб. арш.)}.$$

В кубической сажени 27 куб. аршин:

$$9 \times 3 = 27 \text{ (куб. арш.)}.$$

Оба действия можно записать:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

или $$3^3 = 27.$$

Задачи 173. Ребро куба 2 саж. Вычислить его объем в кубических саженях, в куб. аршинах.

174. Ребро куба 2 саж. 2 арш. Вычислить его объем в куб. аршинах, в куб. саженях.

175. Закром имеет форму прямоугольного бруса, у которого длина, ширина и высота равны 2 саж. 2 арш., 1 саж. 1 арш., 2 арш. Вычислить его вместимость.

176. Вычислить объем комнаты, длина, ширина и высота которой 3 саж. 1 арш., 2 саж. 2 арш. и 1 саж. 2 арш.

2. Кубический фут есть куб, ребро которого равно 1 футу.

Задачи. 177. Начертить уменьшенное изображение кубической сажени и изобразить на нем кубические футы. Сколько кубических футов в куб. сажени?

178. Один куб. фут сырой земли весит $3^1/_2$ пуда. Сколько весит 1 куб. саж. земли?

179. Решив задачу 178, вычислить, сколько весит 1 куб. арш. земли (в ответе ограничиться только пудами и фунтами).

180. Вычислить объем бруса, размеры которого 3 саж. 4 фут, 1 саж. 3 фут., 4 фут.

3. Кубическая сажень, кубический аршин и кубический фут называются кубическими мерами, или кубическими единицами или единицами объема.

Одна линейная сажень имеет 3 арш., а одна кубическая сажень имеет 3^3 куб. аршин.

Одна линейная сажень имеет 7 футов, а одна кубическая сажень имеет 7^3 куб. футов.

Кроме этих кубических мер, существуют и другие:

1 арш. = 16 верш., а 1 куб. арш. $= 16 \times 16 \times 16 = 16^3 = 4096$ куб. верш.
1 фут. = 12 дюйм., а 1 куб. фут $= 12 \times 12 \times 12 = 12^3 = 1728$ куб. дюйм
1 дюйм = 10 линий, а 1 куб. дюйм. $= 10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ куб. лин.

Задачи. 181. Вычислить объем куба, ребро которого равно 1 футу 3 дюйм.! 3 дюйм. 5 лин.!

182. Сколько весит 1 куб. верш воды, если 1 куб. дюйм ее весит 3 зол. 72 дол. и в куб. вершке содержится $5^1/_3$ куб. дюйм

183. 1 куб. дюйм песку весит 6 зол. Сколько весит 1 куб. фут. песку? 1 куб. сажень песку?

Метрические меры объема.

1 метр = 10 дм.;	1 куб. м. $= 10^3 = 1000$ куб. дм.
1 дм. = 10 см.;	1 „ дм. $= 10^3 = 1000$ „ см.
1 см. = 10 мм.;	1 „ см. $= 10^3 = 1000$ „ мм.

Отсюда видно, что, в то время как метр больше десиметра, десиметр—сантиметра, сантиметр—миллиметра в 10 раз, куб. метр больше куб. десиметра, куб. десиметр больше куб. сантиметра, куб. сантиметр больше куб. миллиметра в 1000 раз, или в 10^3 раз.

Задачи. 184. Сделайте из плотной бумаги открытый с одной стороны убический ящичек, ребро которого равно 1 см. Пригот

товьте из папки открытый кубический ящик, ребро которого равно 1 дм. Чему равна вместимость (емкость) одного и другого ящика. Во сколько раз емкость одного больше емкости другого ящика?

185. Пропитав стенки обоих ящичков (из предыдущей задачи) горячим воском, наполнить ящики водой. Вес воды, помещающейся в куб. сантиметре, называется граммом. Вес воды, заключенной в куб. десиметре, называется килограммом. Сколько граммов в килограмме?

186. Поставив бумажный «кубический сантиметр» на правую чашку аптекарских весов, уравновесьте его куском бумаги. Положив на левую чашку гирьку 1 грамм наполняйте „кубический сантиметр“ медленно при помощи пипетки водой, пока чашки не будут в равновесии. Будет ли «кубический сантиметр» полон водой, когда наступит равновесие чашек?

187. Вырезав 12 прутиков, длиною каждый в 1 м., составьте из них кубический метр следующим образом: четыре прутика положите на пол, а прочие 8 пусть поддерживают четыре ученика. Вычислите затем, сколько кубических сантиметров помещается в кубическом метре?

188. Посмотрите на миллиметр (на мерительной линейке) и вообразите кубический миллиметр. Вычислите, сколько кубических миллиметров в кубическом метре?

189. Ребро кубического ящика, измеренное внутри, равно 35 см. Вычислить вместимость ящика в куб. см.! в куб. дм.! Второй ответ записать в виде десятичной дроби.

190. Объем тела равен 375 куб. мм. Какую часть куб. сантиметра составляет это число? Записать ответ в виде десятичной дроби!

191. Превратить 38 куб. см. 750 куб. мм. в куб. сантиметры! 34500 куб. мм. в куб. сантиметры! 243,5 куб. дм. в куб. метры! 75,2 куб. см. в куб. десиметры!

192. Сколько весит гранитный куб, ребро которого равно 1 метру, если 1 куб. см. гранита весит 2,75 гр. (или $2^3/_4$ гр.)?

193. Вычислить объем стенок закрытого соснового ящика кубической формы, внешнее ребро которого равно 74 см., а внутреннее 70 см! Найти его вес, если известно, что 1 куб. см. сосны весит $^2/_3$ гр.

2. Сделаем из папки открытую с одной стороны коробку кубической формы, иначе говоря, куб без одной грани. Ребро ее пусть будет 10 см., или 1 дм.

Вместимость этой коробки равна 1 куб. дм. и называется литром. Литр — мера вместимости, или емкости сосудов и равен 1 кубическому десиметру. Легко видеть, что 1 литр заключает 1000 куб. см.

Литр равен примерно вместимости 4 чайных стаканов.

Задача 194. Ребро кубического ящика, измеренное изнутри, равно 40 см. Сколько литров заключает ящик?

Русские и метрические кубические меры. Линия в 2 дюйма заключает 5 сантиметров. Нарисуем кубик, ребро которого равно 2 дюймам, и вычислим его объем сперва в куб. дюймах, а затем в куб. сантиметрах. Этот кубик будет содержать 8 куб. дюймов, ибо

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

или 125 куб. см, ибо

$$5 \times 5 \times 5 = 125.$$

Значит, на 8 куб. дюймов приходится 125 куб. см. Поэтому куб. дюйм имеет немного меньше 16 куб. см.

Задачи. 195. 2 вершка заключают около 9 сантиметров. Вычислить, сколько куб. сантиметров заключается в 1 куб. вершке (ответ дать в круглых десятках).

196. Один фут имеет около 30 см. Сколько литров в кубическом футе? (Число, которое получится, будет меньше действительного, примерно, на $1^1/_3$ литра).

Объем прямоугольного бруса (правило). Чтобы вычислить объем прямоугольного бруса, изображенного на черт. 91, мы измеряем его высоту и тем узнаем, сколько в нем слоев: высота 2 вершка. Далее измеряем ширину и тем узнаем, сколько брусков в слое: ширина 3 вершка. Наконец, измеряем его длину и тем узнаем объем одного бруска: длина 6 вершков. После этого полученные числа перемножаем. Короче это правило выражают так:

Чтобы узнать объем прямоугольного бруса, надо перемножить его длину, ширину и высоту.

Задачи. 197. Вычислить объемы прямоугольных брусов, у которых измерения равны $17 \times 12 \times 1$ (саж.); 13 саж. 5 фт. $\times$ 2 саж. $\times$ 1 саж. 7 фт.; 2 фт. 1 дюйм. $\times$ 3 дюйм. $\times$ 7 дюйм.; $23 \times 17 \times 5$ (дм.); $15 \times 16 \times 25$ (см.).

198. Сколько мер зерна содержится в закроме, размеры которого 2 саж. 1 фут, 1 саж. 1 фут и 4 фут., если 1 мера равна почти 1 куб. футу. Сколько это будет приблизительно литров (см. задачу 196? Сколько это будет гектолитров (гектолитр = 100 литр.).

199. Если бы вода, выпадающая в виде дождя и снега, оставалась на земле, то за год в Петербурге выпало бы ее столько, что она стояла бы на высоте 452 мм. над землею. Сколько литров воды выпадает на каждый кв. метр поверхности земли?

200. Хватит ли у вас силы, чтобы поднять один кубический метр пробки? 1 куб. см. пробки весит $^1/_5$ гр. Вычислить вес пробки в пудах, зная, что в пуде 16 с лишком килограммов.

201. Требуется вырыть яму для парника и набить ее навозом. Размер ямы 5 саж. 1 арш. $\times$ 2 арш. $\times$ 1 арш. На скольких подводах придется перевезти конский навоз, если вес 1 куб. саж. навозу принять 81 пуд и на подводу нагружают около 24 пуд. навозу?

202. Подвал имеет размры 4 саж. $\times$ 3 саж $\times$ 2 арш. Сколько кубических саж. дров можно поместить в нем? Сколько поместится погонных сажен восьмивершковых дров?

203. Фундамент дома имеет вид фигуры, изображенной на черт. 86 (стр. 64). Длина дома 10 саж., ширина 7 саж. 1 арш.; ширина рва выкопанного для фундамента 1 арш., глубина 2 арш. Вычислить объем земли, вынутой из рва.

204. Сколько весит вода в прямоугольном сосуде (в аквариуме), если внутренняя длина и ширина аквариума 35 см. и 30 см., а глубина воды 18 см.?

205. Сколько весит глыба льда, длина которой 1 м., ширина 60 см., высота 55 см.? 1 куб. десим. льда весит 900 гр.

206. Вычислить вес мраморной прямоугольной глыбы, имеющей длину и ширину по 5 фут., высоту 2 фут., если 1 куб дюйм мрамора весит 10 зол.

207. Размеры медной пластины, имеющей толщину 3 см., показаны на черт. 84. Вычислить вес пластины, зная, что 1 куб. см. меди весит около 9 граммов.

208. Для ограды потребовалось 25 четыреугольных железных столбов; высота каждого 1 метр, длина и ширина по 4 см. Сколько они весят, если 1 кб. см. железа весит $7^3/_4$ грамма.

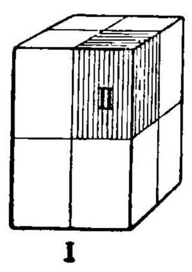
209. Каковы могут быть длина, ширина и высота прямоугольного бруса, если его объем равен 48 куб. верш.?

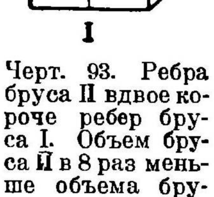
210. Объем прямоугольного столба 420 кб. дюйм. Площадь его основания 35 кв. дюйм. Найти его высоту.

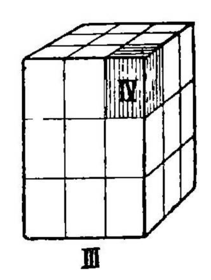
211. Размеры ледника 2 м. 8 дм. $\times$ 2 м. 8 дм. $\times$ 2 м. 5 дм. Какую площадь льда надо сколоть, чтобы набить ледник, если толщина льда 5 дм.?

212. Если в аквариум, имеющий форму прямоугольного бруса, вылить 5200 гр. воды, какую глубину будет иметь эта вода? Дно аквариума имеет стороны 25 см. и 16 см.

Меры длины, площади и объема. Мы научились измерять отрезки прямой линии, поверхности прямоугольников и объемы прямоугольных брусов. Прямые линии мы измеряем, откладывая на них отрезки, хорошо всем известные. Плоские поверхности прямоугольников мы измеряем, заполняя их хорошо известными всем квадратиками. А объемы прямоугольных тел, как мы только что видели, измеряем хорошо всем известными кубиками, напр., куб. сантиметрами, куб. футами и т. д. Для этого мы прямоугольный брус делим на такие кубики и затем эти кубики подсчитываем. Этот счет кубиков мы произведем скорее всего, если перемножим длину, ширину и высоту прямоугольного бруса.




Черт. 93. Ребра бруса II вдвое короче ребер бруса I. Объем бруса II в 8 раз меньше объема бруса I.



Черт. 94. Ребра бруса IV втрое короче ребер бруса III. Объем бруса IV в 27 раз меньше объема бруса III.

Сравнение объемов двух прямоугольных брусов. Разделим все ребра прямоугольного бруса (черт. 93) пополам и сделаем разрезы чрез точки деления ребер бруса, как это изображено на чертеже. Брус разделится на 8 равных частей. Ребра бруса I вдвое больше ребер бруса II, а объем бруса I в 8 раз, т.-е. в 2^3 раз больше объема бруса II.

Разделим теперь все ребра бруса на три равные части и сделаем разрезы чрез точки деления ребер бруса, как показано на чертеже 94. Брус разделится на 27 равных частей. Сравнивая брусы III и IV, мы видим, что ребра бруса III втрое больше ребер бруса IV, а объем бруса III в 27 т.-е. в 3^3 раз, больше объема бруса IV.

Если бы ребра одного бруса были в 10 раз длинее ребер другого бруса, то объем его был бы в 1000 раз или в 10^3 раз больше, чем объем второго бруса.

То же мы видим и у кубов. Ребро, напр., кубического метра в 10 раз больше ребра кубического де-

симетра, а объем кубического метра в 1000 т. е. в 10^3 раз больше объема кубического десиметра.

Формы тел разные—объемы равные. Вылепив из глины кубический вершок, разрежем его пополам плоскостью, проходящей чрез средины параллельных ребер, как это мы делим на стр. 34, черт. 36; из полученных двух частей куба составим прямоугольный брус.

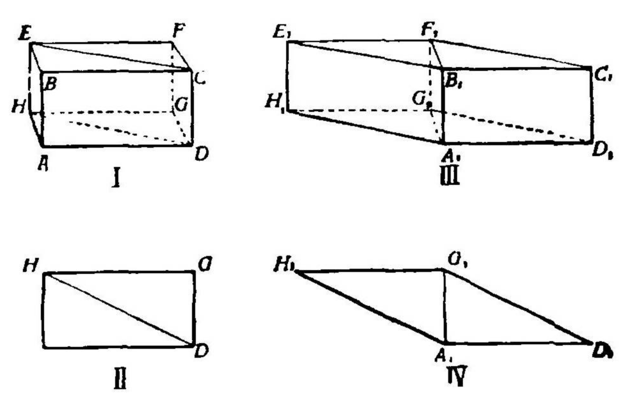
Форма куба и форма бруса, полученного из куба, разные. Части куба равны частям бруса; поэтому куб и брус—тела равносоставные. Объемы их равны; объем бруса равен также одному куб. вершку.

Вылепив из глины еще кубический вершок, разрежем его по диагональной плоскости, и из двух частей составим призму, как на стр. 30, черт. 33,I. Куб и призма составлены из равных частей: они равносоставные. Объемы их равны, формы же разные.

ГЛАВА III.

ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД (БРУС) И ПАРАЛЛЕЛОГРАММ.

1. Вылепим из глины прямоугольный брус I (черт. 95). Основанием его служит прямоугольник II. Разрезав брус по диагональной плоскости *ECDH*, составим из двух получившихся частей новое тело III, основание которого изображено отдельно (черт. IV). Боковые грани этого тела — прямоугольники. Верхняя же и нижняя грани будут иметь вид фигуры IV, которая называется параллелограммом. Брус вначале был прямоугольным, новый брус называется прямым.



Черт. 95. Прямоугольный параллелепипед (брус) I и прямой параллелепипед III. Прямоуг. параллелепипед I разрезан по диагональной плоскости; основание его II. Из частей его составлен прямой параллелепипед III, основание которого IV.

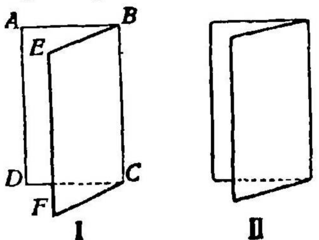
2. Составим из 12 палочек прямоугольный брус, скрепив их гвоздиками так, чтобы боковые его грани могли сдвигаться и раздвигаться. Сдвинем немного эти грани. Прямоугольный брус изменит свою форму. Боковые грани его останутся прямоугольными, а верхняя и нижняя грани примут форму параллелограмма. Брус бу-

дет прямой. У этого бруса мы находим прямые и непрямые углы. Поэтому мы должны ближе познакомиться с непрямыми углами.

22. Угол.

Угол между плоскостями. Две встречающиеся плоскости, напр., две смежные грани бруса, плоскости двух смежных стен, переплет книги образуют угол.

Согнув лист бумаги, как показано на чертеже 96, получим угол. Плоскости *ABCD* и *EBCF*, образующие угол, называются его гранями, а сам угол называется двугранным. Прямая линия *BC*, по которой пересекаются грани, называется ребром угла. Показывая рукой угол, надо показать составляющие его грани.



Черт. 96. Двугранные углы. Угол I больше угла II

Задача 213. Показать в классе двугранные углы. Показать у данного бруса все двугранные углы.

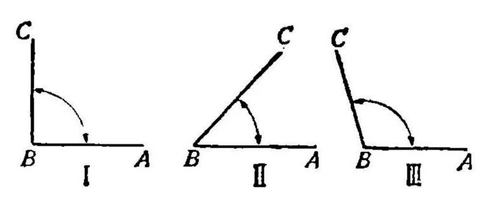
Увеличение и уменьшение угла. Сблизив грани угла, мы угол уменьшим. Раздвигая их — увеличиваем угол. Если граней угла не сдвигаем и не раздвигаем, то величина угла не меняется, в какое бы положение мы его ни ставили.

Сравнение углов. Сравнив два двугранных угла I и II (черт. 96), мы видим, что у I грани раздвинуты больше, чем у II. I угол поэтому больше II. Из двух углов тот больше, у которого грани раздвинуты больше.

Сравнивая два угла, мы обращаем внимание только на то, у какого из них больше или меньше раздвинуты грани, и не обращаем внимания на величину граней.

Задача 214. Сравните разные двугранные углы в классе и скажите который из них больше

Угол между прямыми линиями. Когда две прямые линии *BA* и *BC* выходят из одной точки, то они образуют угол. Прямые *BA* и *BC* называются сторонами угла, а точка *B*—вершиной его.



Черт. 97. Углы (линейные). I — прямой угол, II - острый угол, Ш—тупой угол.

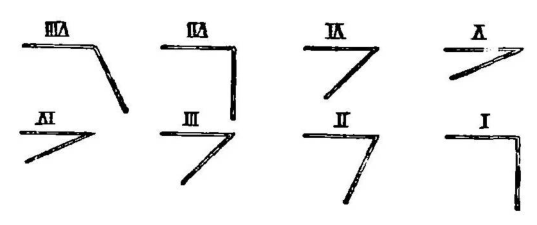
Угол обозначается тремя буквами; та буква, которая стоит у вершины, помещается всегда между двумя другими. Так, угол, изображенный на чертеже, обозначается *ABC* или *CBA*. Часто же угол называют одной буквой, стоящей у вершины напр., на черт. угол *B*.

Показывая рукой угол, надо показать всегда обе его стороны.

Задачи. 215. Начертить какой-нибудь угол и обозначить его тремя буквами! Обозначить одной буквой!

216. Показать все углы у треугольника *ABC* (черт. 121).

Увеличение и уменьшение угла. Взяв в руки два прутика, поставить один из них на другой «прямо». Они образуют п р я м о й угол I (черт. 98). С д в и н е м их несколько: угол уменьшается (угол II). Еще и еще сдвинем, — угол уменьшается (углы III и IV). Будем теперь стороны угла раздвигать, — угол будет увеличиваться (углы V, VI, VII, VIII). Угол увеличивается, когда стороны его раздвигаются, и уменьшается, когда стороны его сближаются.



Черт. 98. Угол, составленный двумя лучинками. Когда стороны сдвигаются, угол уменьшается—I, II, III, IV. Когда стороны раздвигаются, угол увеличивается—V, VI, VII, VIII.

Изменяется ли угол, когда удлиняются или укорачиваются его стороны? Взяв складной аршин, раздвинем его части: получим угол. Удлинив или укоротив одну из его сторон, мы величины угла не изменили, так как мы при этом не сближали и не раздвигали его сторон.

Когда стороны угла укорачиваем или удлиняем, то угол не становится ни больше, ни меньше.

Задачи. 217. Начертите мелом на доске угол! Укоротите его стороны удлините его стороны! еще! еще! Изменится ли величина у л ?

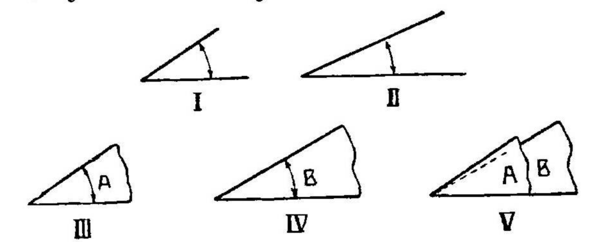
218. Начертите два угла—меньший с длинными сторонами и больший с короткими.

Сравнение углов. На чертеже 99—два угла I и II. Который из них больше? Так как стороны угла I раздвинуты сильнее, чем стороны угла II, то угол I больше угла II.

Из двух углов тот больше, у которого шире раздвинуты стороны.

Угол, равный данному углу. Дан угол, вырезанный из бумаги. Надо начертить угол, равный ему. Для этого положив данный угол на кусок бумаги, обведем его стороны карандашом.

Сравнение углов наложением. Иногда на глаз трудно сказать, который из двух данных углов больше. Чтобы их сравнить, вырежем оба угла из бумаги, напр., углы *A* и *B*. (черт. 99). Наложим теперь угол *A* на угол *B* так, чтобы вершины их совпали и чтобы сторона одного угла пошла по стороне другого. Если, стороны углов совпадут, то углы равны. Если же эти стороны не совпадут, то углы не равны, и тот угол будет больше, у которого стороны раздвинуты больше. Угол *A* больше угла *B*.



Черт. 99. Сравнение углов: уг. I больше уг. II. Углы *A* и *B* сравниваются наложением: уг. *A* больше уг. *B*.

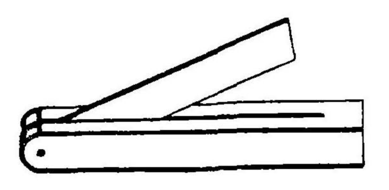
Острый и тупой углы. Угол I на черт. 97—прямой. Угол II, меньший прямого, называется острым. Угол III, больший прямого, называется тупым.

Задачи. 219. Указать в классе прямые, острые и тупые углы!

220. На следующих буквах Л И П А указать прямые, острые и тупые углы.

221. Начертить несколько острых углов разной величины! несколько тупых углов разной величины! начертите угол чуть-чуть меньше прямого угла! чуть-чуть больше прямого угла! какие это будут углы?

В столярном и слесарном мастерстве для построения углов употребляется прибор, который называется малкой (черт. 100)

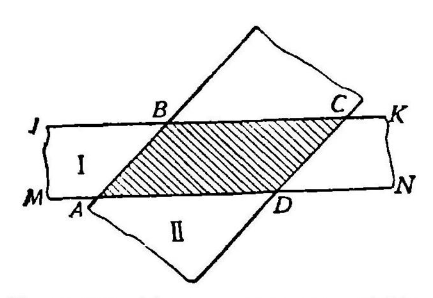


Черт. 100. Малка. Служит для построения угла, равного данному.

Он состоит из двух линеек, скрепленных шарниром. Чтобы начертить угол, равный данному, малку накладывают на данный угол и раздвигают линейки так, чтобы внутренние их края совпадали со сторонами угла. Затем по этим краям вычерчивают угол, где это нужно.

23. Параллелограмм.

Образование параллелограмма. 1. Разрезав квадрат или прямоугольник по диагонали, мы из получившихся двух частей можем составить параллелограмм (стр. 47 черт. 64).



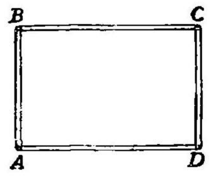
Черт. 101. Параллелограмм *ABCD* —общая часть двух пересекающихся полос I и II. Параллелограмм *ABCD* образован четырьмя параллельными прямыми, которые попарно пересекаются.

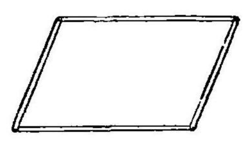
2. Две параллельные прямые *IK* и *MN* (черт. 101) выделяют из плоскости полосу.

Вырезав из бумаги две полосы, сложим их крестообразно, как на черт. 101. Рассмотрим часть *ABCD*, принадлежащую и одной, и другой полосе, или, как говорят, общую часть обеих полос Ее удобно наблюдать, глядя чрез бумажные полосы на свет: часть *ABCD* представится тогда темной. Фигура,

образовавшаяся пересечением двух пар параллельных прямых — пары AB, DC и пары AD, BC, есть параллелограмм. Таким образом, параллелограмм составлен четырьмя пересекающимися прямыми линиями, которые между собою попарно параллельны.

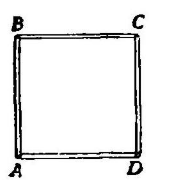
3. Составим прямоугольник $ABCD$ (черт. 102) из 4 палочек, скрепив их гвоздиками так, чтобы палочки могли поворачиваться вокруг гвоздиков. Сблизив несколько стороны AB и AD, получим параллелограмм. Еще больше наклоним сторону AB к основанию AD; угол при точке A у параллелограмма сделается острее.

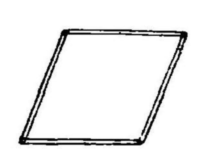




Черт. 102. Подвижный параллелограмм.

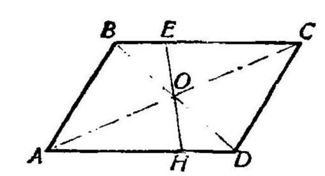
4. Составим из 4 равных палочек квадрат $ABCD$ так же, как мы составляли прямоугольник. Сблизив немного стороны его AB и AD, мы получим параллелограмм с равными сторонами — равносторонний параллелограмм, который называется ромбом.



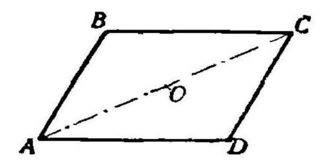


Черт. 103. Подвижный ромб.

Деление параллелограмма на две равные трапеции. Проведем в параллелограмме диагонали AC и BD (чертеж 104) Чрез точку их пересечения O проведем какую угодно прямую линию EH. Она разделит параллелограмм на две равные между собой трапеции $ABEH$ и $CDHE$. Чтобы убедиться, что эти трапеции равны, разрежем параллело-



Черт. 104. Параллелограмм разделен на две равные трапеции прямой EH, которая проходит чрез точку O.



Черт. 105. Параллелограмм разделен диагональю AC на два равных треугольника.

грамм по прямой *EH*. Оставим часть его *ABEH* неподвижной, другую же часть *CDHE* повернем на полуоборот вокруг точки *O*, прикрепив ее в этой точке булавкой.

Заодно убедимся, что противоположные углы параллелограмма *B* и *D*—равны между собою.

Деление параллелограмма на два равных треугольника. Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника. Чтобы убедиться в этом, разрежем параллелограмм *ABCD* (черт. 105) по диагонали *AC*. Оставив треугольник *ABC* неподвижным, повернем треугольник *ADC* на полуоборот вокруг точки *O*.

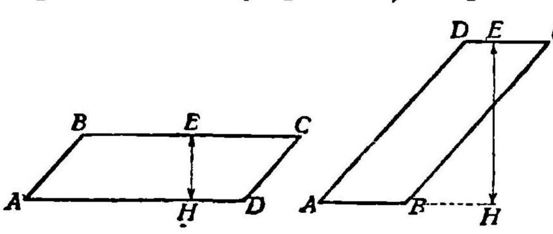
Заодно же убедимся, что противоположные стороны параллелограмма равны: $BC = AD$ и $AB = CD$.

Сравнение параллелограмма и прямоугольника. Какое сходство у параллелограмма с прямоугольником? У того и другого—по 4 угла; по 4 стороны; противоположные стороны попарно параллельны.

Какая разница между параллелограммом и прямоугольником?

У прямоугольника—все четыре угла прямые. У параллелограмма, как видно из черт. 102, они могут быть непрямые.

Основание и высота параллелограмма. В параллелограмме *ABCD* (черт. 106) стороны *AD* и *BC* называются основаниями его, а перпендикуляр *EH*, опущенный из любой точки *E*, взятой на стороне *BC*, на основание *AD*, называется высотой параллелограмма.



Черт. 106. Параллелограмм стоит на длинной стороне: *AD*—основание, *EH*—высота.

Черт. 107. Параллелограмм стоит на короткой стороне: *AB*—основание, *EH*—высота.

Поставив параллелограмм *ADCB* (черт. 107) на более короткую его сторону *AB*, проведем в нем высоту. Может случиться, что конец высоты не придется между

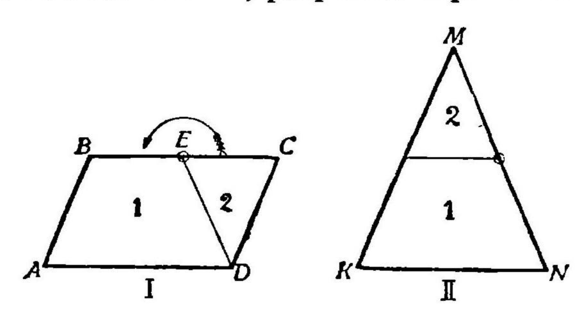
точками A и B основания параллелограмма, как это мы видим на нашем черт. 107. Тогда удлиняем или, чаще говорят, продолжаем основание AB, и перпендикуляр EH опускаем на продолжение основания.

24. Превращения параллелограмма.

Задачи. 220. Разрезав параллелограмм по диагонали, образовать из двух получившихся частей два новых параллелограмма и три четыреугольника.

221. Разрезав параллелограм на две равные трапеции, образовать из них все возможные новые фигуры.

Превращение параллелограмма в треугольник. Превратим параллелограмм в треугольник. Для этого разделим сторону BC параллелограмма пополам в точке E (черт. 108). Соединив точки E и D, разрежем параллелограмм на две части: трапецию 1 и треугольник 2. Поворотим треугольник 2 вокруг точки E на полуоборот. Тогда сторона EC совместится с равной ей стороной трапеции BE. Бока ED трапеции 1 и треугольника 2 вытянутся в одну прямую MN, и мы получим треугольник KMN. Части 1 и 2 параллелограмма I и части 1 и 2 треугольника II—соответственно равны. Поэтому параллелограмм I и треугольник II — фигуры равносоставные.



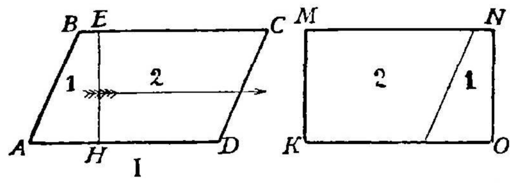
Черт. 108. Превращение параллелограмма I в треугольник II. Точка E—средина стороны BC.

Черт. 109. Превращение параллелограмма I параллелограмм II.

Превращение параллелограмма в параллелограмм иной формы. Соединим какие угодно две точки, выбранные,

на двух противоположных сторонах параллелограмма прямой линией (черт. 109). Разрезав параллелограмм по этой линии, образуем из частей 1 и 2 новый параллелограмм II. Параллелограмм изменит свой вид: у него будут иные углы и иные боковые стороны. Но параллелограммы I и II равносоставные.

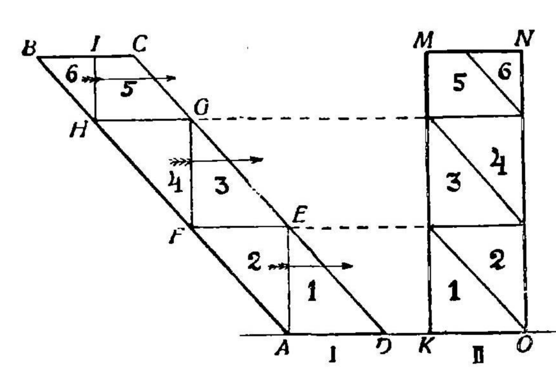
Превращение параллелограмма в прямоугольник. Превратим параллелограмм в прямоугольник.



Черт. 110. Превращение параллелограмма I в прямоугольник II.

1. Параллелограмм I (черт. 110) расположен на длинной своей стороне. Проведя в нем высоту EH, разделим его на две трапеции 1 и 2, из которых составим прямоугольник II.

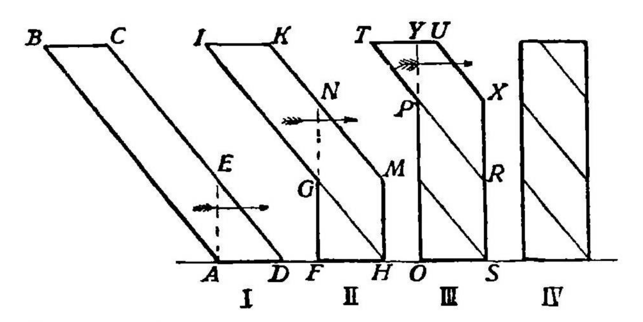
2. Параллелограмм $ABCD$ (черт. 111) расположен на короткой стороне. Из точки A проведем перпендикуляр AE к основанию AD параллелограмма. Из точки E проводим прямую, параллельную AD, и так далее: FG перпендикуляр к FE, HG — параллельна FE, HI— перпендикуляр к HG. Из частей 1, 2, 3, 4, 5 и 6 легко составить прямоугольник $KMNO$. Прямоугольник $KMNO$ и параллелограмм $ABCD$ имеют равные основания и равные высоты. Эти фигуры—равносоставные.



Черт. 111. Превращение параллелограмма I в прямоугольник II.

Превращение параллелограмма $ABCD$ в прямоугольник $KMNO$ можно провести для большей наглядности последовательно (черт. 112).

На плане (черт. 76) участок земли 8 имеет форму



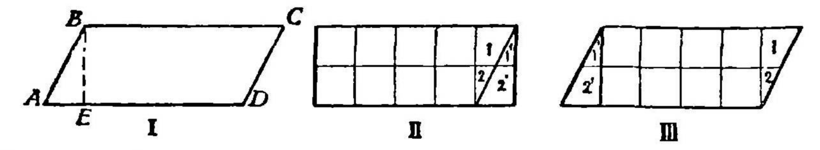
Черт. 112. Последовательное превращение параллелограмма в прямоугольник.

параллелограмма. Если бы нам понадобилось измерить его площадь, как бы мы это сделали?

25. Площадь параллелограмма.

Деление квадрата на кв. единицы или их части. Измеряя площадь прямоугольника и квадрата, мы разбивали всю их поверхность на квадратные клетки; клеточки равнялись какой либо кв. единице, напр., кв. сантиметру, кв. дюйму и т. д. Можно ли то же сделать с поверхностью параллелограмма?

Превратим параллелограмм I, основание которого равно 5 см., а высота 2 см., в прямоугольник II. Осно-



Черт. 113. Измерение площади параллелограмма I. Параллелограмм I превращен в прямоугольник II, который разделен на 10 кв. сантиметров. Параллелограмм III заключает 10 кв. см.

вание прямоугольника II будет также равно 5 см., а высота 2 см. Поэтому поверхность его можно разделить на 10 квадратных сантиметров. Превратим снова прямоугольник II в прежний параллелограмм III. Этот параллелограмм, как видим, разделен на клеточки. Одни из

них—целые квадраты. Другие—части квадратов, из которых можно составить целые квадраты: напр., части 1 и 1', а также 2 и 2'. Параллелограмм III и прямоугольник II составлены из одних и тех же клеточек. Поэтому их площади равны. Площадь параллелограмма равна 10 кв. см.

Задачи. 222. Начертить какой-либо параллелограмм, основание которого 6 см. и высота 3 см. Превратив его в прямоугольник, найти площадь.

223. Измерить площадь параллелограмма *ABCD* на чертежах 111 и 112.

224. Вычислить площадь параллелограмма, основание которого 10 см., высота 5 см.! основание 3 дюйма, высота 2 дюйма! основание 15 фут., высота 8 фут.! Основание 9 саж. 1 арш., высота 6 саж. 2 арш.!

Правило. Вычисляя площадь параллелограмма *ABCD* мы превратили его предварительно в прямоугольник (черт. 113). Затем умножили основание прямоугольника на его высоту. Но при обращении параллелограмма в прямоугольник ни основание его, ни высота не изменились. Поэтому, чтобы вычислить площадь параллелограмма, надо измерить его основание и высоту и полученные числа перемножить. Короче говоря:

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Правило, служащее для вычисления площади параллелограмма, можно выразить еще короче. Обозначим площадь параллелограмма буквой *П*, его основание и высоту буквами *о* и *в*. Тогда правило выразится так:

$$П = о \times в$$

Буква *П* здесь обозначает число кв. мер, заключающихся в поверхности параллелограмма, а *о* и *в*—числа линейных мер, откладывающихся на его основании и высоте.

Какими буквами обозначать площадь, основание и высоту параллелограмма—безразлично. Мы могли бы число линейных единиц, заключающихся в основании параллелограмма, обозначить буквой *а*; число линейных

единиц, содержащихся в его высоте, буквой h; площадь— буквой S. Тогда площадь параллелограмма была бы равна:

$$S = a. h$$

Задачи. 225. Измерить площадь участка земли, занятого лесом, по плану, изображенному на стр. 52 (черт. 76).

226. Вычислить площадь параллелограмма, у которого $a = 14$ мм. и $h = 7$ мм.; $a = 13{,}5$ см. и $h = 8{,}4$ см.; $a = 3$ фут. 8 дюйм. и $h = 1$ фут. 10 дюйм.!

227. Измерить площади параллелограммов, изображенных на чертежах 105, 106 стр. 81 и 82.

228. Из прямоугольного куска жести, длина которого 100 см. и ширина 40 см., вырезать ромб той же ширины, сторона которого равна 50 см. Сделать чертёж в масштабе 1 : 20. Вычислить площадь ромба и площадь остатка.

229. Из прямоугольного куска жести, размеры которого. 48 см. $\times$ 36 см., вырезать ромб, вершины которого находятся в срединах сторон прямоугольника. Вычислить его площадь разными способами.

230. Поле имеет форму параллелограмма. Как разделить его на 3 равные части?

231. Измерить стороны и высоты параллелограмма $ABCD$ (черт. 107). Вычислить его площадь, приняв за основание сперва одну сторону, а затем другую. Сравнить результаты. Если они не вполне равны, найти их среднее арифметическое число.

232. Разыскать на поле полосу земли, имеющую форму параллелограмма и измерить ее площадь. Разыскать на плане вашей местности параллелограмм и вычислить его площадь.

233. Поле имеет форму параллелограмма, основание которого 65 саж., высота 32 саж. Сколько стоила аренда поля, если за аренду десятины платили в этой местности 18 руб.?

234. Какую ширину имеет параллелограмм, основание которого 40 метр., а площадь 1000 кв. м.!

235. Выразить длину основания a параллелограмма, площадь которого S, а высота h. Чему равно a, если $S = 2400$ кв. саж., $h = 30$ саж.? $S = 1554$ кв. саж., $h = 37$ саж.?

25. Формулы.

1. Запишем с помощью букв площадь прямоугольника. Пусть его основание будет a, высота h и площадь S. Тогда площадь прямоугольника выразится:

$$S = a. h.$$

2. Обозначив сторону квадрата через a, а его площадь через S, получим, что площадь квадрата равна:

$$S = a.a,$$

или

$$S = a^2.$$

3. Стороны параллелограмма a и b. Найти его периметр, т. е. сумму четырех сторон его. Обозначив периметр через p, будем иметь

$$p = a + b + a + b = a + a + b + b = 2a + 2b = (a + b).2$$

4. Обозначив длины трех смежных ребер прямоугольного бруса через a, b и c, его объем через v, найдем, что объем прямоугольного бруса равен:

$$V = a.b.c.$$

5. Объем V куба, ребро которого имеет a единиц длины, равен:

$$V = a.a.a,$$

или

$$V = a^3.$$

Задачи. 236. Вычислить площадь параллелограмма, у которого $a=15$ см., а $h=8$ см.! $a=2$ фут. 1 дюйм, $h=4$ дюйм.! $a=3$ дм., $h=15$ см.!

237. Вычислить объем прямоугольного бруса, у которого $a=15$ см., $b=10$ см. и $c=8$ см.! $a=3$ фт., $b=15$ дюйм. $c=10$ дюйм.!

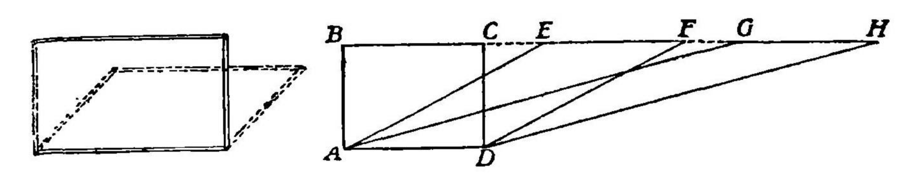
238. Вычислить объем куба, у которого $a=11$ дм.! $a=3$ дм. 5 см!

239. Стороны параллелограмма $a=15$ см. и $b=10$ см. Вычислить его периметр.

Чтобы вычислить площадь параллелограмма, его периметр, объем прямоугольного столба и т. д., мы пользовались сокращенной записью тех действий, которые надо для этого выполнить. Такую сокращенную запись называют формулой. Следовательно, $V = a^3$, $p = (a + b).2$, $S = a.h$ суть формулы.

26. Наибольшая площадь и наименьший периметр параллелограмма.

1. Сделав из палочек подвижную модель параллелограмма, будем менять его углы (черт. 114). Периметр



Черт. 114. Подвижный параллелограмм.

Черт. 115. Равновеликие параллелограммы.

параллелограмма будет оставаться все тот же. Площадь будет изменяться и достигнет наибольшей величины когда углы параллелограмма станут прямыми.

Задача 240. Стороны огороженного участка земли, имеющего форму параллелограмма, 36 саж. и 9 саж. Узнать длину его ограды. Какую форму должен иметь параллелограмм, чтобы площадь земли в ограде была наибольшая? Какова будет в этом случае его площадь?

2. Площади параллелограммов (черт. 115) *ABCD*, *AEFD* и *AGHD* равны, так как эти параллелограммы имеют равные основания и равные высоты; но периметры у них разные. Из параллелограммов, имеющих равные площади, наименьший периметр будет иметь прямоугольный параллелограмм.

Задачи. 241. Надо огородить участок земли, который имел бы форму параллелограмма. Основание и высота параллелограмма 36 саж. и 9 саж. Какую форму должен иметь параллелограмм, чтобы вся длина изгороди была наименьшая? Какова будет его площадь?

242. Площадь огороженного прямоугольного участка земли 324 кв. саж. (см. предыдущую задачу). Какую форму должен иметь этот прямоугольник, чтобы изгородь его имела наименьшую длину?

Указание. Составьте таблицу:

длина	ширина	площадь	периметр
324 саж.	1 саж.	324 кв. с.	650 с.
162 „	2 „	324 „ „	328 „

и т. д.

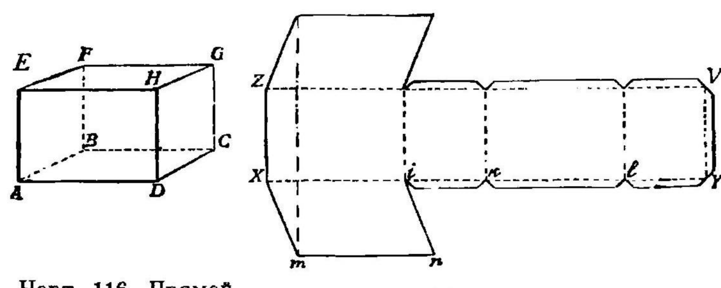
27. Прямой параллелепипед (брус).

Сравнение прямого и прямоугольного параллелепипедов. Сравним прямой и прямоугольный брусы.

Сходство их: тот и другой ограничены шестью гранями; противоположные грани попарно равны и параллельны; боковые грани у обоих тел — прямоугольники, перпендикулярные к основанию.

Разница между ними: у прямоугольного бруса основанием служит прямоугольник, у прямого же бруса — параллелограмм.

Развертка прямого параллелепипеда. Боковые стороны AB, BC, CD и DA основания прямого бруса перпендикулярны к его боковым ребрам AE, BF, CG и DH; а по-



Черт. 116. Прямой параллелепипед.

Его развертка.

тому они вытянутся при развертывании его поверхности в одну прямую линию XY (черт. 116). Ребра же EF, FG, GH и HE — в прямую ZV.

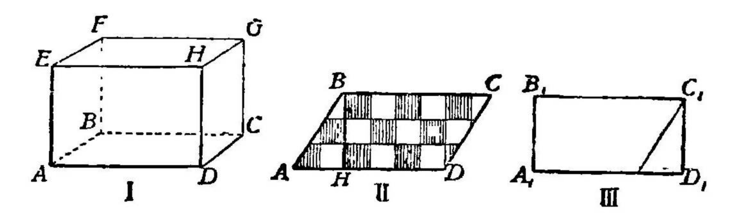
Из боковых граней прямого параллелепипеда составится прямоугольник $XZVY$. Так как противоположные грани $AEHD$ и $BFGC$ бруса равны, то отрезки Xi и kl на развертке равны. По той же причине $ik=lY$ Очевидно также, что $in=Xm$. Наклон стороны in к линии XY може быть различный. Его можно определить, выбирая отрезок Xm определенной длины.

28. Объем прямого параллелепипеда.

1. Измеряя объем прямоугольного бруса или куба, мы эти тела делили на кубические единицы — куб. санти-

метры, куб. вершки и пр. Чтобы не выдумывать особых мер для измерения объема прямого параллелепипеда, попытаемся его превратить в прямоугольный параллелепипед. Для этого, вылепив из глины прямой параллелепипед, разрежем его на две части подобно тому, как мы разрезывали на две части параллелограмм, превращая его в прямоугольник *). Затем две части параллелепипеда прямого соединим так, чтобы получился параллелепипед прямоугольный. Оба параллелепипеда—прямой и прямоугольный—будут равносоставные; объемы их будут равны.

Вычислим объем прямоугольного параллелепипеда. На черт. 117 изображен прямой параллелепипед I. Его основание, параллелограмм *ABCD*, изображено отдельно



Черт. 117. I—прямой параллелепипед. II его основание, разделенное на кв. единицы. III — прямоугольник, полученный из параллелограмма II.

(черт. 117, II). Когда мы превратим прямой параллелепипед в прямоугольный, то основание его, параллелограмм *ABCD*, преобразуется в прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. Пусть сторона A_1D_1 прямоугольника равна 6 см., высота его $A_1B_1 = 3$ см. Тогда площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ будет равна 18 кв. см., ибо $6 \times 3 = 18$ (кв. см.). Пусть высота бруса равна 4 см., тогда его объем будет равен 72 кб. см., ибо

$$18 \times 4 = 72 \text{ (кб. см.)}.$$

Это значит, что полученный прямоугольный параллелепипед может быть составлен из 72 кубиков, каждый кубик величиной в 1 куб. см.

---

*) Примеч. То же можно пояснить и на готовом бумажном разборном (составленном из двух частей) прямом брусе.

Если мы обратно превратим прямоугольный параллелепипед в прямой, то этот прямой параллелепипед будет содержать те же 72 куб. см., только, как видно из чертежа 117, II, некоторые из кубиков будут разрезаны

Итак, мы видим, что и прямой параллелепипед может быть измерен кубическими мерами.

2. Однако, для этого нет необходимости его каждый раз разрезывать. Чтобы избежать разрезывания, будем рассуждать так.

У основания $ABCD$ прямого параллелепипеда сторона $AD=6$ см., высота $BH=3$ см. Поэтому его площадь равна 18 кв. см. Это значит, что основание $ABCD$ можно разделить на такие клеточки (черт. 117, II), из которых составится 18 квадратиков, величиною в 1 кв. см. каждый. Поставим на каждый квадратик параллелограмма $ABCD$ по кубику, величиной в 1 куб. см., а на клеточку, меньшую кв. сантиметра, соответствующую часть кубика. Тогда, чтобы покрыть всю поверхность параллелограмма сплошь, понадобится 18 куб. сантиметров. Все они вместе составят слой, в основании которого будет параллелограмм $ABCD$, а высота—1 см. Таких слоев, очевидно, в данном прямом брусе поместится столько, сколько сантиметров содержится в высоте бруса. Так как высота бруса равна 4 см., то получим 4 слоя; объем каждого слоя 18 куб. см. Объем целого бруса 72 куб. см.

Задачу нашу мы решили в два действия:

Сперва узнали площадь основания прямого бруса:

$$6 \text{ кв. см.} \times 9 = 18 \text{ кв. см.}$$

Затем вычислили его объем:

$$18 \text{ куб. см.} \times 4 = 72 \text{ куб. см.}$$

Задачи 243. Вычислить объем прямого бруса, у которого сторона основания равна 7 см., соответствующая ей высота основания 5 см. и высота бруса 4 см.

244. Вычислить объем прямого параллелепипеда, размеры которого следующие: сторона основания 62 лин.; высота основания, соответствующая этой стороне, 25 лин.; высота бруса 10 дюйм.

Решая предложенные выше задачи, мы должны были подметить и правило для вычисления объема прямого параллелепипеда, которое коротко выражается так:

Чтобы вычислить объем прямого параллелепипеда, надо площадь его основания умножить на высоту.

Пусть длина стороны AD (черт. 117) будет a, высота BH равна h, высота параллелепипеда H. Тогда его объем V равен:

$$V = a.\ h.\ H.$$

Задачи. 245. Вычислить объем прямого бруса, зная, что $a = 10$ см., $h = 5$ см. и $H = 12$ см.! $a = 2$ фут. 1 дюйм; $h = 1$ фут 3 дюйм.; $H = 5$ лин.

246. Дана коробка, имеющая форму прямого параллелепипеда. Сделав необходимые измерения, найти ее вместимость. Наполнив ее песком, измерить объем песку мензуркой. Сравнить оба результата: чем объясняется разница между ними?

247. Вычислить вес медной пластинки, имеющей форму параллелограмма, основание и высота которого 15 см. и 8 см., а толщина пластинки 3 мм. Один куб. см. меди весит 8,8 гр.

248. Вычислить толщину цинковой пластинки, имеющей форму параллелограмма, основание и высота которого 17 см. и 15 см.: вес 637 гр. Вес одного куб. сантиметра цинка равен 7 гр.

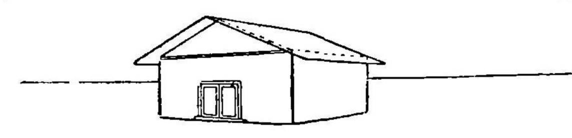
249. Подвижный (шарнирный) брус, изображенный на черт. 57 (стр. 42) поставим на стол. Сделаем его сперва прямоугольным; будем затем менять его форму. Изменяется ли при этом его объем? Если изменяется, то как?

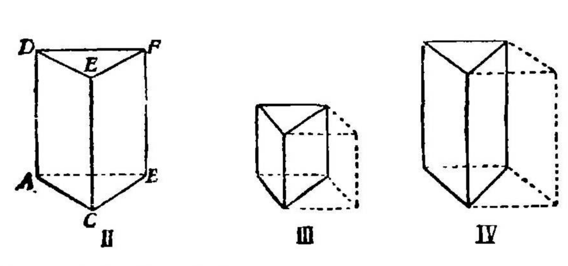
ГЛАВА IV.

ТРЕХГРАННАЯ ПРИЗМА И ТРЕУГОЛЬНИК.

29. Треугольник.

Трехгранная прямая призма. Изображенный на черт. 118, I сарай состоит из двух частей: одна часть, ограниченная стенами, потолком и полом, имеет вид прямоугольного параллелепипеда (бруса); другая же часть—крыша имеет форму прямой трехгранной призмы. Прямая трехгранная призма изображена на черт. II отдельно. С нею мы познакомимся, а затем изготовим ее из папки и из глины.



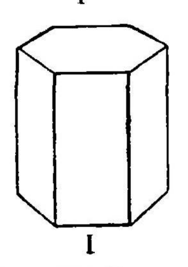


Черт. 118. Сарай I состоит из прямоугольного параллелепипеда и трехгранной призмы. II, III и IV — прямые трехгранные призмы. III — половина куба. IV половина прямоуг. параллелепипеда.

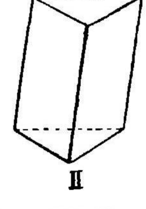
Кроме призмы II, на черт. 118 изображены еще две трехгранных призмы: одна III полученная рассечением глиняного куба по диагональной плоскости; другая IV—рассечением прямоугольного бруса по диагональной плоскости.

Каждая из этих трех призм ограничена с боков тремя прямоугольниками, которые могут быть названы **боковыми гранями**. Так как их три, то призма называется **трехгранной**, в отличие от других призм (черт. 119), которые имеют более, чем три боковых грани.

Грань *DEF* называется верхним основанием призмы, а грань *ACB*—нижним. Эти две грани параллельны друг другу. Таким образом призма I ограничена **пятью** гранями. Боковые грани призмы перпендикулярны к основанию, поэтому призма называется **прямой**, в отличие от наклонной призмы (черт. 120), в которой боковые грани наклонены к основанию.



Черт. 119. Прямая шестигранная призма.



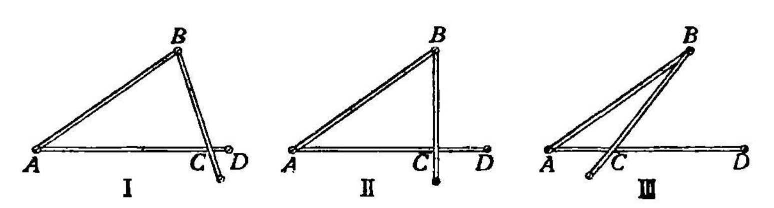
Черт 120. Наклонная трехгранная призма.

Треугольник. 1. Осмотрим внимательнее **верхнюю** грань призмы II (черт. 118). Обведем ее рукой по ребрам *DE*, *EF* и *FD*. Фигура *DEF*—плоская; ограничена тремя прямыми линиями; три ее стороны образуют три угла. Фигура эта, как мы уже знаем, называется треугольником.

2. Ранее мы встречались с треугольником при делении квадрата и прямоугольника диагональю (стр. 27).

Задача 250. Начертить на бумаге треугольник и вырезать его.

Типы треугольников. Прикрепим к доске кнопками



Черт. 121. Треугольники: I — остроугольный, II — прямоугольный, III—тупоугольный.

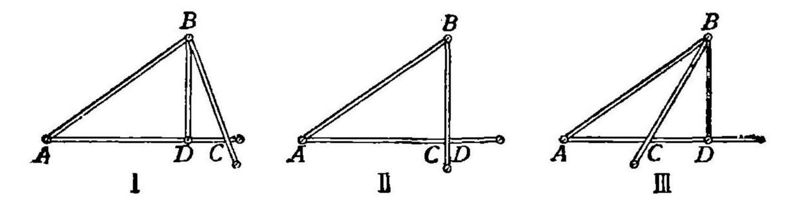
три узких бумажных полоски, как указано на черт. 121 Одна из них *BC* может вращаться вокруг кнопки *B*

В треугольнике *ABC* (черт. I) три угла острые. Этот треугольник называется **остроугольным**.

Поворотим прямую *BC* так, чтобы она стала перпендикулярно к прямой *AC* (черт. II). Треугольник *ABC* будет **прямоугольный**. Стороны его *BC* и *AC*, заключающие прямой угол, называются **катетами**, а сторона *AB*— **гипотенузой**.

Когда стороны *AC* и *BC* треугольника составляют тупой угол (черт. III), то и треугольник называется **тупоугольным**.

Основание и высота треугольника. В треугольнике *ABC* (черт. 122, I) сторона *AC*, обращенная к нам, называется **основанием**; стороны *AB* и *CB*—**боковыми сторона**-



Черт. 122. В треугольниках I, II и III *AC* — основание, *BD* — высота.

ми; точка *B*—вершиной треугольника. Мы можем повернуть треугольник так, что основанием его будет сторона *BC*, а вершиной точка *A*; или основанием может быть сторона *AB*, а вершиной точка *C*.

Задача. 251. Начертить на бумаге остроугольный треугольник и его вершины обозначить буквами *A*, *B* и *C*! Назвать его стороны, углы, вершины углов! Показать основание, правую боковую сторону, левую боковую сторону! Показать две стороны и угол, заключенный между ними! Показать сторону и углы, прилежащие к ней. Показать сторону, лежащую против угла *A*. Показать угол, противолежащий стороне *BC*!

252. Измерить три стороны треугольника (из предыдущей задачи) и вычислить их сумму (**периметр** треугольника). Начертить отрезок, равный периметру треугольника.

2. Образовав остроугольный треугольник *ABC* (черт. 122, I) из узких бумажных полосок, прикрепленных к доске кнопками, прикрепим еще одну полоску *BD*, которая начинается от вершины треугольника и идет перпендику-

лярно к основанию AC; так что прямая AD и основание треугольника AC составляют прямой угол. Перпендикуляр BD называется высотой треугольника.

Задача. 253. Начертить остроугольный треугольник и провести в нем высоты из всех трех вершин.

3. Будем поворачивать сторону BC треугольника, пока она не станет перпендикулярно к основанию AC (черт. II). Так как катет BC перпендикулярен к основанию треугольника AC, то он служит высотой треугольника.

Задача 254. Начертить прямоугольный треугольник и провести в нем высоты из всех трех вершин.

4. Поворотим сторону BC треугольника далее, чтобы угол ACB стал тупым (черт. III). Тогда высотой тупоугольного треугольника ACB будет служить перпендикуляр BD, опущенный из вершины B на продолжение стороны AC треугольника.

Задача. 255. Начертив тупоугольный треугольник, провести в нем высоты из всех трех вершин.

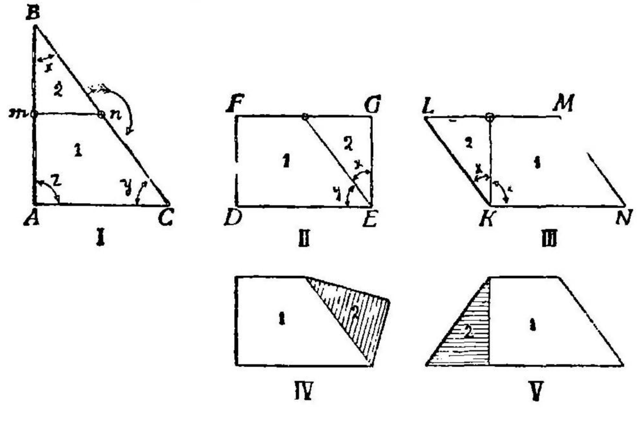
Обратить внимание на то, как пересекаются три высоты треугольника в задачах 253, 254 и 255.

30. Превращения треугольника.

Превращение прямоугольного треугольника. Вырезав из бумаги прямоугольный треугольник (черт. 123), разрежем его на такие две части, из которых можно было бы составить прямоугольник. Для этого, разделив боковые стороны его AB и CB пополам, соединим средины их m и n и разрежем треугольник по линии mn. Прямая mn будет параллельна основанию его AC; поэтому фигура 1 может быть названа трапецией. В треугольнике 2 угол Bmn —прямой. Будем вращать треугольник 2 вокруг точки n по направлению, указанному стрелкой, пока отрезки Bn и nC не сольются. Получим прямоугольник II. У этого прямоугольника основание DE равно основанию AC треугольника; высота же FD составляет половину высоты треугольника AB.

Обратим внимание на то, как составился прямой угол E прямоугольника $DFGE$ (черт. II): углы x и y тре-

угольника ABC мы сложили так, что их вершины B и C совпали, сторона Bn одного из них слилась со стороной Cn другого. Угол DEG (черт. II) назыв. суммой углов x и y.



Черт. 123. Превращения прямоугольного треугольника. Прямоугольник II и параллелограмм III получаются путем вращения mBn вокруг n и m. Пятиугольник IV и трапеция V—поворачиванием 2 наизнанку.

Чтобы получить фигуру III, надо вращать треугольн. mBn вокруг точки. m. Тупой угол K параллелограмма $KLMN$ (черт. III) получился от того, что мы к прямому углу z (черт. I) прибавили острый угол x.

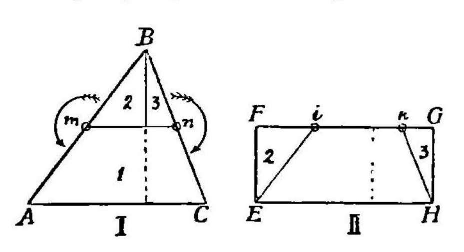
Пятиугольник IV получается из прямоугольника II, если повернуть 2 изнанкой наверх.

Трапецию V получим из параллелограмма III, перевернув треугольник 2 наизнанку.

Задача 256. Начертив прямоугольный треугольник, разделить его на части, из которых можно было бы составить прямоугольник. Начертить прямоугольник, состоящий из тех же частей.

Все фигуры I, II, III, IV и V—равносоставные. Их площади равны.

Превращение косоугольного треугольника. 1. Вырезав из бумаги остроугольный треугольник, превратим его в прямоугольник. Мы можем это сделать, разделив его перпендикуляром, опущенным из вершины на основание, на два прямоугольных треугольника (черт. 124, I). Каждый из этих треугольников пре-



Черт. 124. Превращение треугольника в прямоугольник. Прямоугольник II получается из треугольника путем вращения треугольников 2 и 3 вокруг точек m и n.

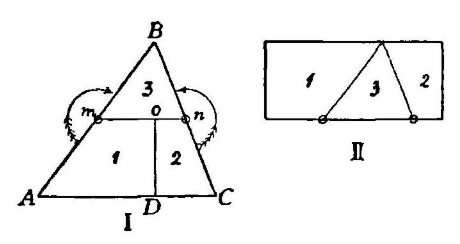
вратим в прямоугольник, как это делали мы выше. Получим прямоугольник II. Основания прямоугольника II и треугольника I равны, а высота прямоугольника вдвое меньше высоты треугольника.

Тот же результат можно получить еще и так: сперва превратить треугольник I в параллелограмм, а затем из параллелограмма легко сделать прямоугольник.

Чтобы восстановить из прямоугольника II (черт. 124) прежний треугольник I, надо повернуть треугольники 2 и 3 вокруг точек *i* и *k*.

2. Вместо того, чтобы разрезать треугольник *mBn*, можно разрезать по линии *Do* трапецию *AmnC* (черт. 125, I). Повернув части ее 1 и 2 на полъоборота, превратим треугольник в прямоугольник II.

Прямую *Do*, перпендикулярную к основанию трапеции, мы можем провести в любом месте ее. Если разрезать трапецию *AmnC* (черт. 125) по линии *Do* на две части и каждую из них повернуть на полъоборота вокруг точек *m* и *n*, то получится прямоугольник.

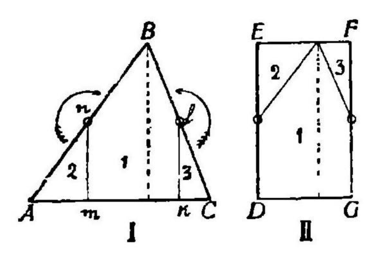


Черт. 125. Превращение треугольника в прямоугольник. Прямоугольник II получается путем вращения 1 и 2 вокруг точек *m* и *n*.

Площади треугольника I и прямоугольника II равны.

Задача 257. Начертив треугольник, разделить его прямыми линиями на части, из которых можно бы было составить прямоугольник. Начертить затем прямоугольник, состоящий из тех же частей. (Несколько способов).

3. Треугольник *ABC* (черт. 126) можно превратить в прямоугольник и иным способом. Проведя высоту в треугольнике *ABC*, мы разделим его на два прямоугольных треугольника. Каждый из них превратим в прямоугольник, разрезав их по линиям *mn* и *kl*. Поворотом

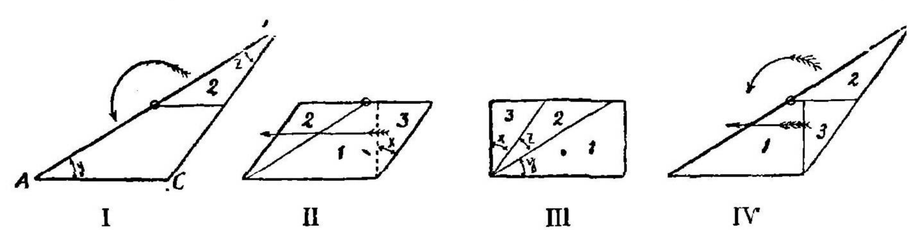


Черт. 126. Превращение треугольника в прямоугольник. Прямоугольник II получится путем вращения 2 и 3 вокруг точек *n* и *l*.

треугольника 2 около точки n и треугольника 3 около точки l можно привести треугольник I к прямоугольнику II.

Обратим внимание на то, что, деля отрезки основания пополам, мы его уменьшили вдвое. Поэтому основание треугольника II вдвое короче, чем треугольника I, а высоты треугольника I и прямоугольника II равны.

Превращение тупоугольного треугольника. Превращение в прямоугольник тупоугольного треугольника видно из чертежа 127. Фиг. I—треугольник, фиг. II—полу-



Черт. 127. Превращение тупоугольного треугольника в прямоугольник. Параллелограмм II получен вращением 2 в сторону, указанную стрелкой. Прямоугольник III получается скольжением 3 по стрелке. Из треугольника IV получается прямоуг. III путем движений, указанных стрелками.

ченный из него параллелограмм, фиг. III—прямоугольник, фиг. IV—данный треугольник, разрезанный на 3 части.

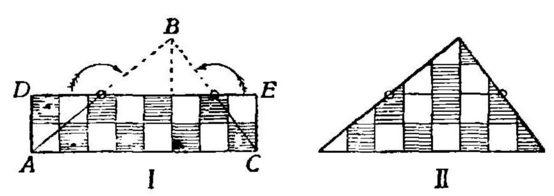
Обратим внимание на то, что прямой угол прямоугольника III есть сумма трех углов: углов y и z данного треугольника и угла x прямоугольника II.

31. Площадь треугольника.

Нередко участок земли имеет форму треугольника. В этом можно убедиться, рассматривая тот или другой план местности. Напр., план, изображенный на стр. 52. Как в этом случае измерить площадь этого участка?

Высота делится пополам. Вырежем из бумаги треугольник ABC, основание которого равно 8 см., высота 4 см. Можно ли поверхность этого треугольника заполнить квадратными сантиметрами, как это мы делали, когда измеряли поверхность прямоугольника? Чтобы ответить на этот вопрос, превратим треугольник в прямоугольник $ADEC$ (черт. 128). Этот прямоугольник будет иметь одинаковое с треугольником основание, равное 8 см., а высоту вдвое меньшую высоты треугольника,

т.-е. 2 см. Разделим прямоугольник *ADEC* на квадратики, величиной в 1 кв. см. Площадь прямоугольника будет равна 16 кв. см. Восстановим из прямоугольника прежний треугольник (фиг. II). Он разделен на клеточки, из которых одни—квадратики, другие—части квадратиков. Из всех этих клеточек можно составить 16 квадратиков, общая площадь которых 16 кв. см. Площадь треугольника *ABC* равна 16 кв. см.



Черт. 128. Площадь треугольника. Треугольник *ABC* превращен в прямоугольник *ADEC*, площадь которого 16 кв. см. Площадь треугольника равна произведению основания на половину высоты.

Задачи. 258. Вырезать из бумаги остроугольный, тупоугольный и прямоугольный треугольники. Основание каждого из них 7 см., а высота 6 см. Найти площади этих треугольников, превратив их предварительно в прямоугольники.

259. Вычислить площадь треугольника, основание которого 25 арш., а высота 14 арш.! основание 15 см., а высота 14 см.! основание 63 саж., высота 48 саж.!

260. Вычислить площадь прямоугольного треугольника, катеты которого 200 м. и 100 м.

Для того, чтобы измерить площадь треугольника *ABC* (черт. I), нет необходимости его разрезывать на части. Мы видим, что основание прямоугольника *ADEC* и треугольника *ABC* одно и то же, а высота прямоугольника вдвое короче высоты треугольника. Поэтому, чтобы вычислить площадь треугольника, измеряем его основание и высоту и, разделив высоту пополам, полученные числа перемножаем. Короче говорят:

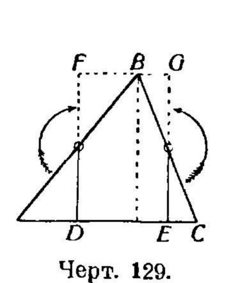
Чтобы вычислить площадь треугольника, надо основание его умножить на половину высоты.

Основание делится пополам. Мы можем треугольник *ABC* превратить в прямоугольник *DFGE* (черт. 129) так, как это мы делали раньше (стр. 99). Основание прямоугольника *DE* вдвое меньше основания треугольника *AC*. Высота же треугольника и прямоугольника одна и та же. Поэтому:

Чтобы вычислить площадь треугольника, надо половину основания умножить на высоту.

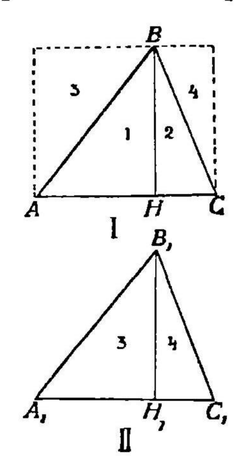
Задача 261. Вычислить площадь треугольника, у которого основание 14 см., а высота 15 см.! основание 60 саж., а высота 80 саж.! основание 20 метр., а высота 10 метр.!

Произведение основания на высоту делится пополам. Наконец, можно применить и третий способ измерения площади треугольника. Вырежем из бумаги треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC (черт. 130). Разрезав его вдоль высоты B_1H_1, приложим одну часть его 3 к стороне AB треугольника, а другую часть 4 к стороне BC, как показано на черт. I. Мы получим прямоугольник. Этот прямоугольник составлен из частей 1 и 2 треугольника ABC и частей 3 и 4 второго треугольника $A_1B_1C_1$. И так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, то площадь прямоугольника вдвое больше площади данного треугольника. Чтобы вычислить площадь треугольника ABC, измеряем основание AC прямоугольника и высоту его BH. Перемножив эти числа, получим площадь прямоугольника. Разделив площадь прямоугольника пополам, получим площадь треугольника ABC.



Черт. 129.

Площадь треугольника равна произведению половины основания на высоту.



Черт. 130. Площадь треугольника. Треугольник ABC есть половина прямоугольника I. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Так как основание и высота прямоугольника I равны основанию и высоте треугольника ABC, то:

Чтобы найти площадь треугольника, надо умножить его основание на высоту и полученное произведение разделить пополам.

Задача 262. Вычислить площадь треугольника, у которого основание и высота 25 фут. и 17 фут. 35 м. и 19 м.!

Формула площади треугольника. Обозначим числа, полученные при измерении основания и высоты треугольника, через a и h. Тогда площадь S треугольника равна:

$$S = a . \frac{h}{2},$$

или

$$S = \frac{a}{2} . h,$$

или

$$S = \frac{a . h}{2}.$$

Первые две формулы мы получили, превращая треугольник в прямоугольник двумя способами, а третью формулу—удваивая треугольник. Но мы могли бы и без этого из первой формулы получить две другие. Пусть нам надо вычислить формулу:

$$S = 8 \times (4 : 2).$$

Это вычисление можно сделать тремя способами:

$$S = 8 \times (4 : 2),$$

или

$$S = (8 : 2) \times 4,$$

или

$$S = (8 \times 4) : 2.$$

Эти три способа можно отнести и к вычислению площади треугольника:

$$S = a . (h : 2) = (a : 2) . h = (a . h) : 2.$$

Задачи. 263. Начертив треугольник, измерить три его стороны и три высоты. Вычислить площадь треугольника, приняв за основание его сперва одну, затем другую и, наконец, третью сторону. Равные ли получились площади? Если нет, то чем можно объяснить разницу между ними?

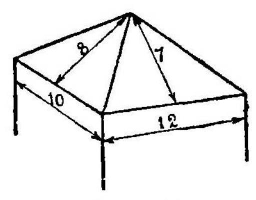
264. На плане (стр. 52) имеются треугольные участки земли 7-ой и 9-ый. Измерить их площади, пользуясь масштабом, который дан там же.

265. Вычислить площадь участка земли 9, план которого изображен на черт. 76 (стр. 52) в масштабе 1:840.

266. Разыскать на карте вашей местности треугольный участок земли и вычислить его площадь.

267. Фронтон (формы треугольника) у здания имеет основание 5 м. и высоту 3 м. Сколько стоит окраска фронтона по существующей цене за 1 кв. м.?

268. Надо сделать четырехскатную железную крышу дома. Два ската видны на рисунке 131. Размеры скатов указаны на том же рисунке в аршинах. Сколько потребуется листов железа (2 арш. × 1 арш.), гвоздей и дней работы, если на 1 кв. саж. крыши надо $5^1/_3$ листов, 27 гвоздей и одному кровельщику $^1/_2$ дня работы.



Черт. 131.

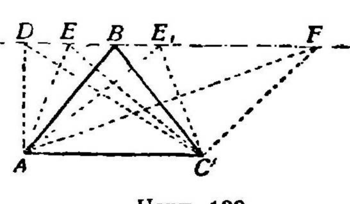
269. Поле имеет форму треугольника, одна сторона которого равна 126 саж. и высота, соответствующая ей, 85 саж. Сколько ржи потребуется, чтобы засеять его, если на 1 десятину идет 10 пудов?

270. Прямоугольный участок земли имеет основание 34 саж. 2 фт. и высоту 28 саж. 4 фт. Надо взамен этого участка отрезать в другом месте треугольный участок земли, имеющий такую же площадь, как и первый. Вычислить его высоту, зная, что основание его равно 42 саж. 6 фт.?

271. Составить треугольник из бумажных полосок, прикрепив их кнопками к доске. Две стороны *AC* и *AB* этого треугольника остаются неизменными, угол же *A* и сторона *BC* меняются. Сперва стороны *AC* и *AB* совмещены, а затем раздвигаем их. Когда площадь треугольника будет наибольшая? Указать два разных положения сторон, при которых площади треугольников будут равны.

Указание. Примите одну из неизменных сторон за основание. Ищите наибольшую высоту.

Треугольники, имеющие равные основания и равные высоты. 1. Из одного и того же куска папки вырезать три треугольника. Основание каждого из них 12 см., высота 9 см. Один из них прямоугольный, другой имеет равные боковые стороны, третий тупоугольный. Очевидно площадь каждого из них равна 54 кв. см. Так как площади треугольников равны, то треугольники называются равновеликими. Сравнить их веса на аптекарских весах.



Черт. 132.

2. Чрез вершину B треугольника ABC проведена прямая линия DF, паралельная основанию AC треугольника (черт. 132). Сравнить площади треугольников ADC, AEC, ABC, AEC, и AFC.

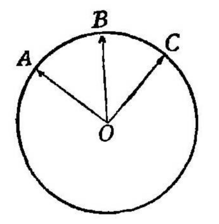
Задачи. 272. Дан остроугольный треугольник. Начертить равновеликий ему прямоугольный треугольник.

273. На прямой AE отделены равные отрезки AB, BC, CD и DE. Их концы соединены с точкой O, лежащей вне прямой. Сравнить между собой площади треугольников AOB, BOC, COD и DOE.

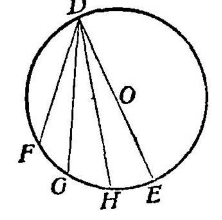
274. Треугольный участок земли ABC выходит одной стороной AC к реке. Разделить его на три части, которые имели бы равные площади и имели бы выход к реке (см. предыдущую задачу).

32. Окружность.

Поставив ножку циркуля ее острием на бумагу, другой ножкой, имеющей карандаш, опишем полную (замкнутую) кривую линию. Эта кривая линия называется окружностью. Точка O (черт. 133), в которой опиралась острая ножка циркуля, называется центром окружности. Плоскость, ограниченная окружностью, называется кругом.



Черт 133. Окружность. OA, OB и OC радиусы.



Черт. 134. Окружность. DF, DE, DH— хорды. DE—диаметр.

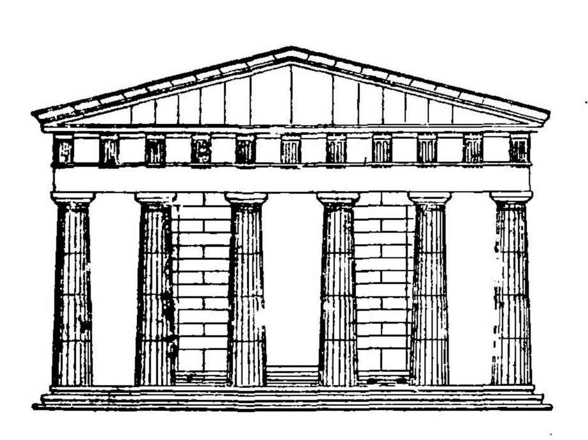
Отметим на окружности несколько точек A, B и C. Расстояния AO, BO, CO их от центра O равны. Все точки, лежащие на окружности, равно удалены от центра. Прямая линия AO, один конец которой лежит на окружности, а другой в центре O, называется радиусом окружности. У окружности все ее радиусы равны.

Прямая DF (черт. 134), соединяющая две точки окружности, называется хордой. Кроме этой хорды, в той же окружности проведены еще хорды DG, DH, DE. Из них наибольшая та, что проходит чрез центр окружности. Ее называют диаметром.

Диаметров в окружности можно провести сколько угодно. Все они равны. Каждый диаметр состоит из двух радиусов окружности.

33. Равнобедренный и равносторонний треугольники.

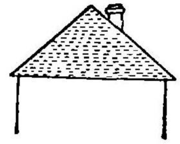
У зданий мы встречаем очень часто треугольные фигуры: части крыши, фронтоны, украшения над окнами, над дверьми и пр. На рисунках 135 и 136 мы находим треугольники. Боковые стороны этих треугольников равны. Треугольники называются **равнобедренными.**



Черт. № 135. Фасад греческого храма. Верхняя часть его—фронтон.

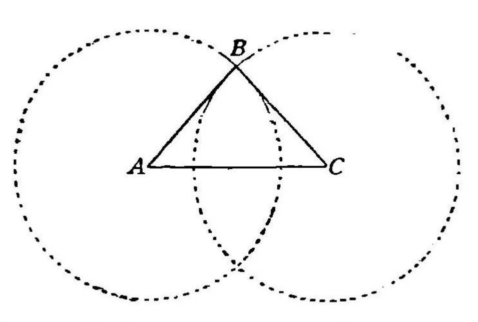
Построение равнобедренного треугольника. 1. Построим равнобедренный треугольник, основание которого равно 8 см., а высота 5 см.

Начертим отрезок прямой *AC* в 8 см. и отметим его средину *O*. Из точки *O* восставим к прямой *AC* перпендикуляр. Где придется вершина равнобедренного треугольника? Сделаем несколько проб. Отметим точки *D*, *B*, *E* на расстоянии 5 см от линии *AC*. Из них точка *B* лежит на перпендикуляре *OB*. Все эти точки лежат на прямой, параллельной линии *AC*. Соединим точку *D* с точками *A* и *C*. Получим треугольник, у которого левая боковая сторона короче правой. Когда соединим точку *E* с концами основания *AC*, то правая сторона треугольника будет короче левой. Соединив точку *B*, лежащую на перпендикуляре *OB*, восставленном из средины отрезка *AC*, получим равнобедренный треугольник *ABC*, у которого основание *AC* = 8 см. и высота *OB* = 5 см.



Черт. 136.

2. Построим равнобедренный треугольник, у которого основание равно 8 см., а боковая сторона 6 см. Начертим сперва основание треугольника AC (черт. 137), равное 8 см. Растворив циркуль на столько, чтобы расстояние между остриями равнялось 6 см., поставим одну его ножку в точку A, а другой опишем дугу. То же сделаем, поставив ножку его в точку C. Какую бы точку мы не взяли на первой дуге, она находится на расстоянии 6 см. от точки A. Какую бы точку не поставили на второй дуге, она будет лежать на расстоянии 6 см. от точки C. Точка B, которая лежит и на первой дуге и на второй дуге, находится на расстоянии 6 см. и от точки A, и от точки C. Поэтому, соединив ее с точками A и C, мы получим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AC=8$ см., $CB=6$ см. и $AB=6$ см.



Черт. 137. Построение равнобедренного треугольника.

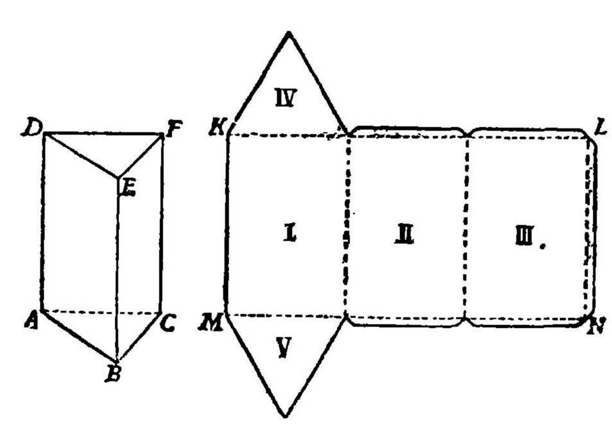
Построение равностороннего треугольника. Построим треугольник, у которого каждая сторона равна 8 см. Этот треугольник будем строить так же, как и предыдущий. Только дуги придется провести на расстояниях 8 см. от точек A и C. Такой треугольник, у которого три стороны равны, называется равносторонним.

34. Прямая трехгранная призма.

Изготовление прямой трехгранной призмы. 1. Сделаем из бумаги прямую трехгранную призму. Пред нами трехгранная призма (черт. 138). Основанием ее служит равносторонний треугольник ABC. Боковые стороны у прямой призмы—прямоугольники. А так как стороны треугольника AB, BC и CA равны, то боковые грани призмы равны. Если развернем боковую поверхность призмы, то получим прямоугольник $KLMN$, состоящий из равных прямоугольников I, II и III, которые служат

боковыми гранями призмы. Равносторонние треугольники IV и V служат основаниями призмы.

Задача 275. Изготовить из бумаги развертку поверхности прямой трехгранной призмы, высота которой равна 8 см., а каждая сторона основания равна 5 см.



Черт. 138. Прямая трехгранная призма и ее развертка.

2. Все три боковые грани призмы составляют ее боковую поверхность. А если к боковой поверхности еще присоединить верхнее и нижнее основания призмы, то получим ее полную поверхность.

Задачи. 276. Показать на развертке трехгранной призмы (черт. 138) боковую поверхность призмы! полную ее поверхность!

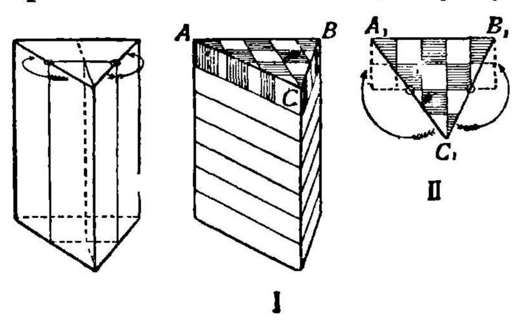
277. Вычислить боковую и полную поверхность призмы, изготовленной по требованию задачи 275, сделав для этого необходимые измерения.

Объем трехгранной призмы. Чтобы объем трехгранной призмы можно было измерить при помощи кубической единицы, напр., кубического сантиметра, мы могли бы ее превратить в прямоугольный параллелепипед подобно тому, как это мы делали с треугольником, когда измеряли его площадь. Разрезы призмы обозначены на черт. 139.

Однако, можно измерить объем призмы кубической единицей, и не разрезывая ее. Для этого попытаемся заполнить ее, хотя бы мысленно, кубическими единицами, напр., кубическими сантиметрами. На черт. 140, II изображено основание призмы—треугольник $A_1B_1C_1$. Превратив его в прямоугольник, разделим этот прямоугольник на квадратики, каждый величиною в 1 кв. см. Так как основание треугольника 5 см., а высота 4 см., то прямоугольник, а значит и треугольник будет заклю-

чать 10 кв. см. После обратного превращения прямоугольника в треугольник одни квадратики окажутся целыми, а другие разрезанными (черт. II).

Вообразим теперь, что мы на каждую клетку основания призмы внутри призмы поставим по одному куб. сантиметру. Чтобы покрыть весь треугольник *ABC*, потребуется 10 куб. сантиметров, из которых одни останутся целыми, а другие придется резрезать на части. Эти 10 кубиков составят слой, основание которого покроет треугольник *ABC*, а высота равна 1 см. (черт. I). Объем такого слоя равен 10 куб. см., т.-е. содержит столько же куб. сантиметров, сколько площадь основания призмы заключает кв. сантиметров.



Черт. 139. Превращение прямой трехгранной призмы в прямоугольный параллелепипед.

Черт. 140. Вычисление объема трехгранной призмы.

Пусть высота призмы 7 см. Тогда слоев, толщиной в 1 см., выйдет из нее 7. Объем же призмы будет 10×7=70 (кб. см.).

Задачи. 278. Взять полую модель прямой трехгранной призмы из папки, открытую с одной стороны, и вычислить ее вместимость, произведя нужные измерения. Отмерив с помощью мензурки полученное число куб. единиц песку, насыпать его в призму. Заполнилась ли вся полость призмы? Если стенки призмы пропитать горячим воском, то в нее можно, вместо песку, налить воды. Результаты будут лучше.

279. Вычислить объем данной прямой трехгранной призмы. Какие надо для этого сделать измерения?

280. Вычислить объем прямой трехгранной призмы, у которой основание и высота треугольника 8 см. и 8 см., а высота призмы 8 см.! основание и высота треугольника 10 дюйм. и 9 дюйм., а высота призмы 12 дюйм.!

Измеряя объем призмы, изображенной на черт. 140, I, мы нашли, что на ее основание надо поставить 10 куб.

сантиметров, чтобы сплошь покрыть его. Число 10 в то же время показывает и площадь основания призмы. Значит:

Чтобы вычислить объем прямой трехгранной призмы, надо площадь ее основания умножить на высоту.

Обозначив основание и высоту треугольника призмы чрез a и h, а высоту призмы через H, найдем ее объем v:

$$v = \frac{a.\ h.\ H}{2}.$$

Задачи. 281. Вычислить объем трехгранной призмы, у которой a=10 см., h=5 см., H=8 см.! a=9 арш.. h=7 арш., H=16 арш.!

282. Сколько сена поместится на чердаке сарая, имеющем форму трехгранной призмы, у которой основание и высота треугольника 8 фут. и 5 фут., а длина чердака 15 фут.? Куб. фут сена весит $4^2/_3$ фунта.

283. Стеклянная прямая трехгранная призма имеет в основании прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 см. и 6 см. Высота призмы 10 см. Вычислить ее вес, зная, что 1 куб. см. стекла весит 2,5 гр.

284. Вычислить, сколько куб. саж. заключает земляной вал, имеющий форму трехгранной призмы, если известно, что основание поперечного сечения вала 6 фут., высота 3 фут., длина вала 25 фут.

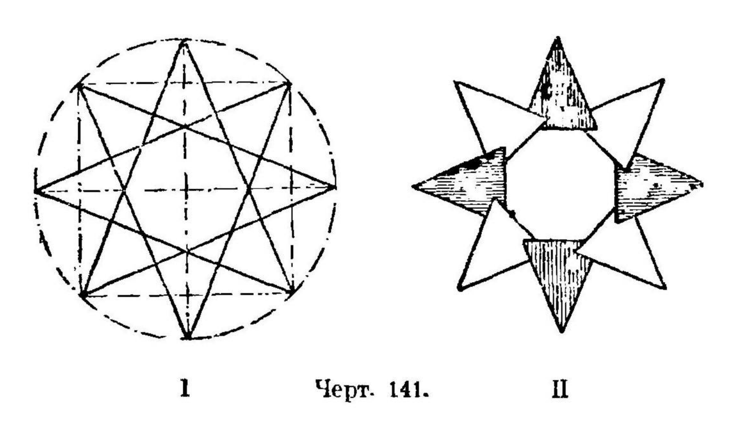
285. Вес латунной треугольной пластинки 374 гр. Основание и высота треугольника 11 см. и 8 см. Вычислить ее толщину, зная, что 1 куб. см. латуни весит 8,5 гр.

286. Вес чугунной треугольной пластины 2,1 килогр. Основание и высота треугольника 24 см. и 10 см. Вычислить ее толщину, если 1 куб. см. чугуна весит 7 гр.

35. Треугольные орнаменты.

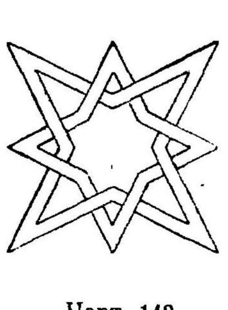
Звездочка (черт. 141, II) из 8 равнобедренных треугольников или вычерчивается, или вырезывается из бумаги. В первом случае можно воспользоваться кругом

и вписанным в него квадратом, которые начерчены прерывистой чертой (черт. I).

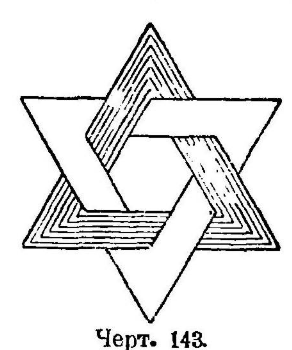


I Черт. 141. II

Во втором случае можно вырезать из цветной бумаги 8 равных равнобедренных треугольников, основание каждого 4,1 см. и высота 5 см., 4 — одного цвета и 4—другого. Начертив квадрат, сторона которого равна 10 см., располагаем треугольники, пользуясь его диагоналями и средними линиями.



Черт. 142.



Черт. 143.

Орнамент (черт. 142) можно начертить, проведя в квадрате диагонали и средние линии. Плетушку, изображенную на черт. 143, удобнее всего вырезать из цветной бумаги, сделав два равных равносторонних разноцветных треугольника. Наложив один треугольник на другой так, чтобы вышла фиг. 143, легко сообразить, как сделать в них вырезы.

ГЛАВА V.

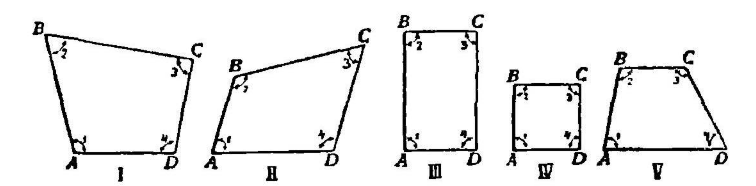
МНОГОУГОЛЬНИК.

36. Площадь многоугольника.

Виды многоугольника. Обходя какую-нибудь местность или рассматривая план местности (черт. 76), мы замечаем на ней много разных фигур. С некоторыми из этих фигур мы сейчас познакомимся.

1. С треугольником мы уже ранее встречались. Мы видели, что формы треугольников бывают разнообразные.

2. На чертеже 144 изображены четыреугольники. Каждый из них составлен четырьмя прямыми линиями

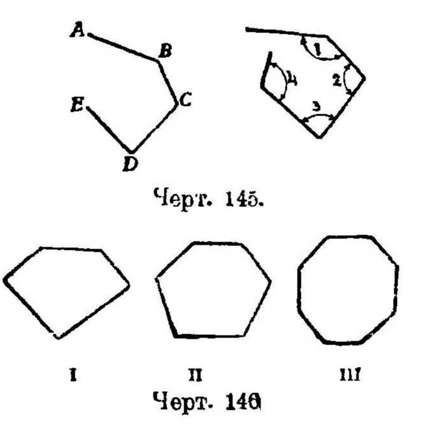


Черт. 144. Виды четыреугольников.

или сторонами AB, BC, CD и DA. Стороны четыреугольника образуют четыре угла, отмеченные цифрами 1, 2, 3 и 4.

Фигуры I и II (черт. 145) нельзя считать четыреугольниками, хотя фигура I имеет 4 стороны, а фигура II четыре угла. Отличаются они от четыреугольников тем, что они разорваны, разомкнуты.

3. Фигура I, изображенная на чертеже 146, называется пятиугольником. Он составлен пятью прямыми линиями, которые образуют — пять углов. На черт. II изображен шестиугольник, а на чертеже III восьмиугольник.



Черт. 145.

Черт. 146

Треугольник, четыреугольник, пятиугольник и т. д. называются одним именем — многоугольники.

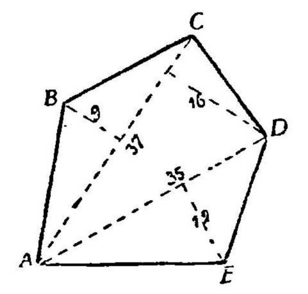
Задачи. 287. Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник? Можно ли назвать наибольшее число сторон многоугольника?

288. Из 5 прутиков составить ломанную линию, незамкнутую и замкнутую.

289. Начертить какой-нибудь четыреугольник и провести в нем диагональ. На какие фигуры делит она четыреугольник?

290. Начертить пятиугольник и провести в нем из одной какой-нибудь вершины диагонали. Сколько их? На какие фигуры разделили они пятиугольник?

Неправильный многоугольник. Надо измерить поверхность многоугольного участка земли—поля, луга, огорода и т. д., напр., площадь поля, изображенного на плане (стр. 52, черт. 76, 11). Как это сделать? Научимся сперва измерять площадь многоугольника, начерченного на бумаге.



Черт. 147. Вычислить площадь многоугольника *ABCDE*.

Измерим площадь многоугольника *ABCDE* (черт. 147). Так как мы умеем измерять площади треугольников, то разделим диагоналями данный многоугольник на треугольники. Измерив основания и высоты треугольников (на чертеже они уже указаны), вычислим площади их:

$$\text{пл.}\ \triangle ABC = \frac{37 \times 9}{2};\quad \begin{array}{r} 370 \\ -\ 37 \\ \hline 333 \end{array} : 2 = 166^{1/2}$$

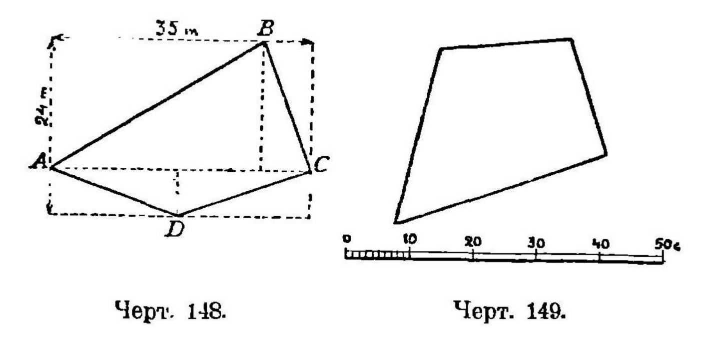
$$\text{пл.}\ \triangle ACD = 37 \times \frac{16}{2};\quad 37 \times 8 = 296$$

$$\text{пл.}\ \triangle AED = 35 \times \frac{12}{2};\quad \underline{35 \times 6 = 210}$$

$$672^{1/2}\ \text{кв. мм.} = 6{,}725\ \text{кв. см.}$$

Задачи. 291. Измерить площадь поля 11 на плане (черт. 76, стр. 52) по данному на плане масштабу.

292. Вычислить площадь четыреугольника $ABCD$ (черт. 148), у которого диагональ $AC = 35$ mm., а высоты образовавшихся треугольников, 17 mm. и 7 mm.



Черт. 148. Черт. 149.

293. Вычислить площадь пятиугольника $ABCDE$, у которого диагонали $AC = 35$ см., $AD = 35$ см. Высоты треугольников, проведенные из вершины B и D к диагонали AC равны $BF = 18$ см.; $DG = 14$ см. Высота треугольника ADE, проведенная к диагонали AD, равна $EH = 24$ см.

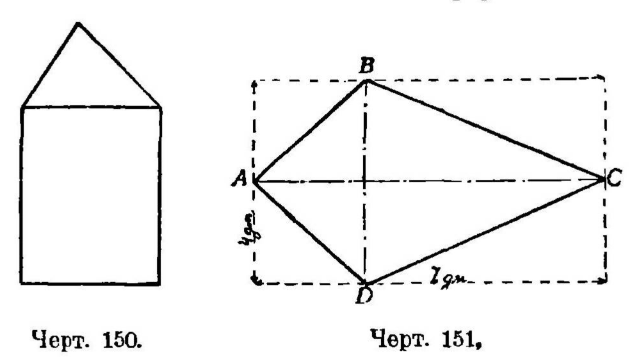
294. Чему равна площадь участка земли, изображенного на черт. 146, I, где 2 метра заключаются в 1 мм.

295. Измерить площадь четыреугольного участка земли, изображенного на черт. 149.

296. Измерить площадь фигуры (черт. 150), пользуясь метрическими мерами.

297. Вычислить площадь бумажного змея (черт. 151) $ABCD$ по данным, указанным на чертеже.

298. Для вычисления площади четыреугольника $ABCD$ черт. 148), вокруг него построен прямоугольник, одна сторона которого параллельна диагонали AC. Стороны прямоугольника равны 35 м. и 24 м. Найти площадь четыреугольника $ABCD$.



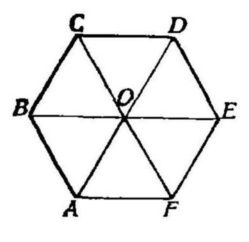
Черт. 150. Черт. 151.

299. Измерить площадь четыреугольного участка земли по плану (черт. 149), окружив его прямоугольником (см. предыдущую задачу).

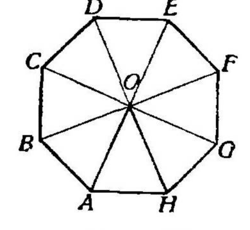
300. Диагональ четыреугольного участка земли равна 35 фут., а высоты треугольников, проведенные к ней, 16 фут. и 20 фут. Требуется вместо, этого участка, нарезать прямоугольный кусок земли, имеющий такую же площадь. Одна сторона прямоугольника равна 30 фут. Узнать другую сторону.

301. Начертить прямоугольник, площадь которого была бы равна площади четыреугольника, изображенного на черт. 148. Много ли можно построить таких прямоугольников?

Правильный многоугольник. Шестиугольник, изображенный на черт. 152, составлен из 6 равных равносторонних треугольников AOB, BOC, COD и т. д. Восьмиугольник (черт. 153) составлен из 8 равных равнобедренных треугольников. Такие многоугольники называются **правильными**. О них подробно мы еще будем говорить во II части Геометрии. Площадь многоугольника $ABCDEF$ легче всего найти так. Измерив площадь треугольника AOF, умножить ее на 6.

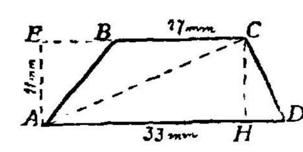


Черт. 152.



Черт. 153.

Задача 302. Имея несколько готовых правильных многоугольников из бумаги, вычислить их площади.



Черт. 154. Площадь трапеции.

Площадь трапеции. Измерим еще площадь трапеции $ABCD$ (черт. 154). Разделив ее диагональю на два треугольника ABC и ADC, примем за основания этих треугольников параллельные стороны трапеции BC и AD. Тогда высоты этих треугольников AE и CH будут равны. Вычислим площади треугольников и площадь трапеции:

пл. $\triangle$ $ABC = {}^{17}/_2 \times 11$; $187:2 = 93,5$
пл. $\triangle$ $ACD = {}^{33}/_2 \times 11$; $363:2 = 181,5$
275 кв. мм. $=$ 2,75 кв. см.

Вычисление еще более упростится, если мы его будем производить по формуле. Чтобы составить такую формулу, вспомним из арифметики, что, умножая, напр., 23×7 или $(20+3) \times 7$, мы умножаем 20×7 и 3×7, затем оба произведения складываем. И наоборот, если мы умножим 20×7 и 3×7, затем полученные произведения сложим, то этим мы 23 возьмем 7 раз. Мысль эту можно написать в виде равенства численного:

$$20 \times 7 + 3 \times 7 = (20+3) \times 7,$$

или буквенного:

$$a.\ h + b.\ h = (a+b).h.$$

Вернемся теперь к нашей геометрической задаче. Чтобы вычислить площадь трапеции мы ${}^{17}/_2$ умножали на 11, затем ${}^{33}/_2$ умножали тоже на 11. Вместо этого могли бы сперва сложить ${}^{17}/_2$ и ${}^{33}/_2$, а затем сумму 25 умножить на высоту. Напишем равенство:

$$^{17}/_2 \times 11 + {}^{33}/_2 \times 11 = 11 \times ({}^{17}/_2 + {}^{33}/_2).$$

Умножив 11 на 25, получим 275 (кв. мм.).

Обозначив длины оснований трапеции буквами a и b и ее высоту буквой h, получим формулу для вычисления площади S:

$$S = \frac{a+b}{2} . h,$$

или

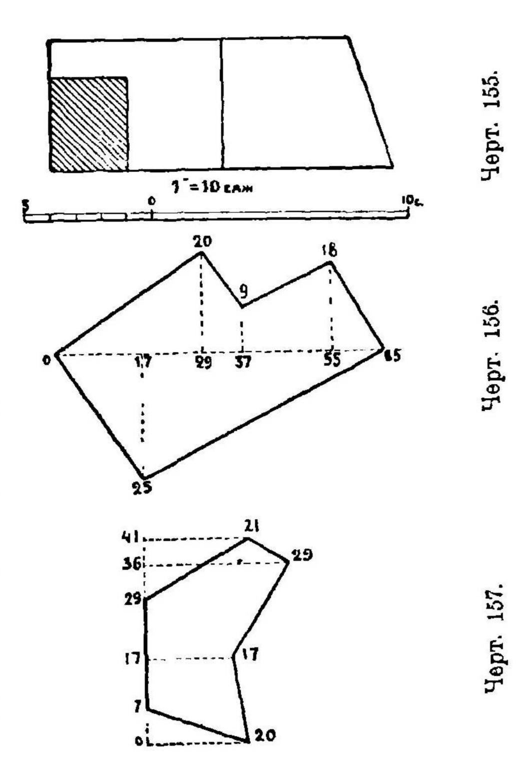
$$S = \frac{(a+b) . h.}{2}$$

Итак, чтобы вычислить площадь трапеции, надо полусумму ее оснований умножить на высоту.

Задачи. 303. Вычислить площадь трапеции, у которой верхнее и нижнее основания равны 35 см. и 25 см., а расстояние между ними 13 см.! $a = 25$ саж. 3 фут.; $b = 18$ саж. 4 фут.; $h = 15$ саж.! $a = 125$ м., $b = 79$ м., $h = 84$ м.!

304. Поле имеет форму трапеции, у которой нижнее и верхнее основания равны 123 м. и 75 м., а расстояние между ними 64 м. Сколько семян пшеницы, ячменя и овса потребуется, чтобы засеять поле, если на 25 аров (ар=100 кв. м.) высевается пшеницы 40 килограммов, ячменя 35 килогр., овса 30 килогр?

305. Поле имеет форму трапеции, у которой $a = 35$ саж. 3 фут.; $b = 28$ саж. 4 фут. и $h = 21$ саж. Сколько ржи соберут с этого поля, если десятина дает около 50 пудов ржи?



Черт. 155.

Черт. 156.

Черт. 157.

306. Измерить площадь, занятую домом, двором и садом (черт. 155).

307. Вычислить площадь участка земли, изображенного на плане (черт. 156). Длина линий указана в саженях.

308. Вычислить площадь участка земли, план которого изображен на чертеже 157 сплошной линией. Измерения сделаны метром.

309. Поле имеет форму трапеции, у которой основания равны 123 м. и 75 м., а высота 64 м. Вместо этого поля надо нарезать в другом месте прямоугольный кусок земли, имеющий одинаковую с ним площадь. Основание прямоугольника равно 99 м. Какова его высота?

310. Измерить площадь луга 10 по плану (стр. 55, черт. 76).

Измерение площади местности. Иногда бывает нужно измерить площадь участка земли, имеющего вид многоугольника или треугольника на местности, не снимая его плана.

Делаем это так. Ставим вехи в его вершинах. Отмечаем вехами главную прямую (черт. 156) линию внутри участка или вдоль одной из его стороны (черт. 157). Второй способ удобен, когда участок вытянут. Далее отмечаем вехами перпендикуляры, идущие от вершин многоугольника к главной линии. Если участок небольшой, напр., не превышает десятины, то концы перпендикуляров можно определить на глаз, ставя в этих точках вехи [1]). Надо следить, чтобы эти вехи находились на прямой линии.

Сделав приблизительный чертеж (набросок) на бумаге от руки участка и всех линий на нем, отмеченных вехами, производим измерения. Записываем результаты на чертеже. Наконец, вычисляем площадь.

Задача. 311. Выбрав несколько небольших треугольных и многоугольных участков земли, произвести необходимые измерения и вычислить их площади.

---

[1]) Если бы участок оказался значительно больше, то положения концов перпендикуляров на главной линии надо было бы проверить и исправить с помощью эккера

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

ГЛАВА III.

Прямой параллелепипед (брус) и параллелограмм.

ГЛАВА IV.

Трехгранная призма и треугольник.

ГЛАВА V.

Многоугольники.